CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

COLEGIADO DE MATEMÁTICA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

UNIOESTE - CAMPUS DE CASCAVEL

FABRÍCIO ADRIÉL RUSTICK

FELIPE AUGUSTO KLUMB

FELIPE SIMÃO SALATESKI

MILLENI FERREIRA DE SOUZA

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO I

PROMAT

Cascavel

2023

FABRÍCIO ADRIÉL RUSTICK

FELIPE AUGUSTO KLUMB

FELIPE SIMÃO SALATESKI

MILLENI FERREIRA DE SOUZA

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:

ESTÁGIO SUPERVISIONADO I

PROMAT

Relatório apresentado como requisito parcial da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática para aprovação.

Orientadora: Prof.ª. Pamela Gonçalves

Cascavel

2023

Sumário

Lista de Figuras:

1. Introdução.

Este trabalho tem por objetivo relatar as atividades desenvolvidas na disciplina de Metodologia e Prática de Matemática - Estágio Supervisionado I, oferecida no 3º ano do curso de Licenciatura em Matemática da Unioeste – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, campus de Cascavel.

Ele é composto inicialmente com a descrição do que é o PROMAT (Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um enfoque à Área de Matemática), e posteriormente um relato sobre a "Gamificação em sala de aula", em que falaremos um pouco dessa metodologia e de algumas das atividades desenvolvidas no encontro em que foi trabalhado o conteúdo de polinômios.

Consta nesse trabalho os planos de aula realizados em cada um dos 10 encontros, seguidos pelos materiais que foram entregues aos alunos e o relatório que aborda como foi o processo. Nosso público-alvo foram alunos da rede pública de ensino, com foco aos que estão no ensino médio. As atividades aconteceram aos sábados pela manhã com início às oito horas e findando às onze horas e quarenta minutos, dentro do período compreendido entre dezesseis de setembro a vinte e cinco de novembro de dois mil e vinte e três.

As atividades foram desenvolvidas e planejadas em quartetos. Para o planejamento das aulas usamos, predominantemente, as metodologias de Gamificação e Resolução de Problemas. Utilizamos materiais lúdicos e jogos, pois acreditamos que os alunos têm uma fixação melhor dos conteúdos. Trabalhamos em grupos para que houvesse diálogo e interação entre os alunos.

Foram utilizados softwares como o Geogebra[1], que tem vários recursos matemáticos que podem ser trabalhados: área, perímetro e outros assuntos, e o Kahoot[2], que é um jogo de perguntas e respostas que podemos utilizar e modificar conforme o assunto trabalhado. Os problemas trabalhados em sala de aula foram tirados em sites e do ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio, e vestibulares, com o intuito de familiarizar os estudantes com esses formatos de questões. Ao final deste trabalho, apresentamos as nossas considerações finais.

---

[1] Versão *online*. Disponível em: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt. Acesso em: 07 dez. 2023.
[2] Disponível em: https://kahoot.com/. Acesso em: 07 dez. 2023.

2. Promat.

O Promat – Programa de Acesso e de Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas: Um enfoque à Área de Matemática, é um projeto de ensino institucional, ofertado anualmente em duas edições pelo colegiado do curso de Licenciatura em Matemática da Unioeste – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, campus de Cascavel/PR.

O projeto tem por objetivo atender alunos do Ensino Médio da rede pública estadual de ensino, que buscam acesso aos cursos superiores, e alunos dos anos iniciais de graduação. No formato de "Curso Preparatório de Matemática" oferta o conteúdo da Educação Básica exigido em vestibulares e no ENEM.

O Programa é constituído por dois semestres, sendo que o primeiro é ministrado pelos discentes do 3° ano do curso de Matemática, dentro da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino da Matemática – Estágio Supervisionado I, orientados por docentes vinculados à disciplina, e nos mesmos moldes, no segundo semestre letivo é ofertado por discentes do 4º ano do curso dentro da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino da Matemática – Estágio Supervisionado II.

Os conteúdos abordados no primeiro período letivo são, principalmente, condizentes com o conteúdo para o Ensino Fundamental. No segundo semestre, os conteúdos são selecionados com um olhar para o Ensino Médio. Os encontros são realizados nas dependências da universidade, no período da manhã do sábado, com duração de 3 horas e 40 minutos cada, havendo um intervalo de 20 minutos.

Para cada semestre é feito um processo novo de inscrições e seleção, sendo totalmente gratuito. No final do projeto, os alunos participantes ganham um certificado de participação no projeto, compatível com a carga horária frequentada. Tendo em vista a importância desse projeto, busca-se trabalhar de forma que rompa os possíveis obstáculos que os estudantes tenham e trazem da escolarização. Para isso, as aulas são supervisionadas pelos docentes e preparadas em quartetos, com várias referências, incluindo livros didáticos, materiais manipulativos e jogos confeccionados pelos próprios acadêmicos.

3. Artigo.

Gamificação aplicada nas aulas do PROMAT

Fabrício Adriél Rustick
Unioeste – Campus Cascavel
fabricio.rustick@unioeste.br

Felipe Augusto Klumb
Unioeste – Campus Cascavel
felipe.klumb@unioeste.br

Felipe Salateski Simão
Unioeste – Campus Cascavel
felipe.simao@unioeste.br

Milleni Ferreira de Souza
Unioeste – Campus Cascavel
milleni.souza@unioeste.br

3.1. Resumo:

Entre os dias 16/09/2023 e 25/11/2023 foram realizados 10 encontros do PROMAT, Projeto de Ensino institucional do Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática, que constitui parte do estágio obrigatório desenvolvido pelos acadêmicos do curso de Matemática. Os encontros aconteceram aos sábados de manhã e consistiram em aulas preparadas pelos alunos do curso para a população em geral (a maioria nos anos finais do ensino médio). Esse artigo debate sobre a aplicação da Gamificação (metodologia ativa de ensino) nas aulas desenvolvidas pelos quatro acadêmicos autores. Além disso, são analisados os benefícios e desafios da aplicação desse método em sala de aula, bem como as práticas e planejamentos imprescindíveis para a sua boa execução (teoria do Flow).

Palavras-chave: Gamificação, Ludicidade, Teoria do Flow, PROMAT

3.2. Introdução

Estamos inseridos em uma sociedade em que as crianças estão cada vez mais solitárias. Um dos vários motivos do porquê isso ocorrer é o de que os pais geralmente precisam trabalhar com uma carga horária grande para conseguir o sustento e, com isso, acabam deixando as crianças com avós, babás, sozinhas em casa, ou até mesmo infringem a lei e as levam para o trabalho para que a criança também ajude a aumentar a renda da casa, a qual ainda é uma dura realidade na qual vivemos.

Com isso, o contato da criança com a primeira instituição social existente (família) acaba sendo, de certo modo, prejudicado e aumenta o papel da escola enquanto instituição social. Dessa maneira, a escola acaba sendo mais do que um simples local em que o aluno aprende o que será exigido em provas e se torna um lugar de extrema importância para a socialização desse indivíduo.

Entre amizades boas e ruins, o estudante vai moldando sua personalidade fortemente baseado nas relações escolares. Entretanto, quando analisamos o padrão de uma aula nos moldes tradicionais, vemos que esse modelo não dá essa devida atenção à socialização. As aulas planejadas pelos professores geralmente envolvem somente práticas individuais, nas quais não há espaço para a troca de ideias entre os alunos. Além disso, muitas escolas contam com um horário de intervalo extremamente rígido e curto sob a explicação de que isso aumenta a produtividade dos alunos em sala, o qual é um pensamento extremamente errôneo. Por exemplo, de acordo com Fontoura em sua matéria na Revista Educação, na Finlândia, país que sempre está próximo do topo nos *rankings* Pisa[3], há intervalos após todas as aulas, o que fornece aos alunos muito mais tempo para interagirem e faz com que os alunos gostem mais de ir para a escola.

Portanto, além de se preocupar em passar o conteúdo de maneira clara para os alunos, os professores também devem ser agentes ativos na tentativa de mudar essa realidade por meio das suas atitudes e de seus planejamentos de aula. Uma das diversas formas de se tentar alcançar esse objetivo e que o nosso grupo de estágio usou recorrentemente durante as aulas é a Gamificação, que tem como princípio a "apropriação dos elementos dos jogos, aplicando-os em contextos, produtos e serviços que não são necessariamente focados em jogos, mas que possuam a intenção de promover a motivação e o comportamento do indivíduo" (Busarello *et al.,* 2014, p. 14). O intuito dessa metodologia é transformar atividades comuns (como um questionário para os alunos) em um jogo que estimule a interatividade e competitividade entre os estudantes.

O termo "Gamificação" vem da palavra "*game*" do inglês, a qual significa "jogo". Esses jogos podem ser feitos de diversas formas: podem ser adaptações de jogos famosos já existentes ou jogos criados pelos professores. Podem ser fundamentados em uma competição entre equipes, competição individual (jogador *versus* jogador), competição contra o professor (todos *versus* um), cooperação entre jogadores (semelhante a um RPG[4]) etc. Os jogos podem ser estruturados por meio da confecção de tabuleiros, baralhos, materiais diversos ou ainda pelo uso de aplicativos, tais como o *Kahoot*[5].

Esse método de aula é eficaz, tendo em vista que ele possui dinâmicas que naturalmente fazem os alunos terem um engajamento maior nas atividades. Por exemplo, a competitividade entre jogadores é um princípio presente em diversos jogos que cativa os participantes. Ao jogar contra um amigo, o estudante automaticamente busca superá-lo, o que exige que ele preste atenção no jogo, nas regras e, invariavelmente, no conteúdo que está sendo utilizado na dinâmica. Além da competição, a possibilidade de ser recompensado por um bom desempenho no jogo e a vontade

---

[3] O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) avalia o desempenho escolar de alunos do mundo todo.

[4] Role-playing game, também conhecido como RPG, é um tipo de jogo em que os jogadores assumem papéis de personagens e criam narrativas colaborativamente. (WIKIPEDIA, disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Role-playing_game. Acesso em: 27, nov. 2023)

[5] Site de quiz online em que é possível criar questionários para que os alunos respondam e ganhem pontos para alcançar uma classificação melhor. Disponível em: https://kahoot.com/. Acesso em 27 nov. 2023

de se obter êxito nos desafios a fim de se alcançar uma realização pessoal também são fatores presentes na Gamificação que estimulam os alunos.

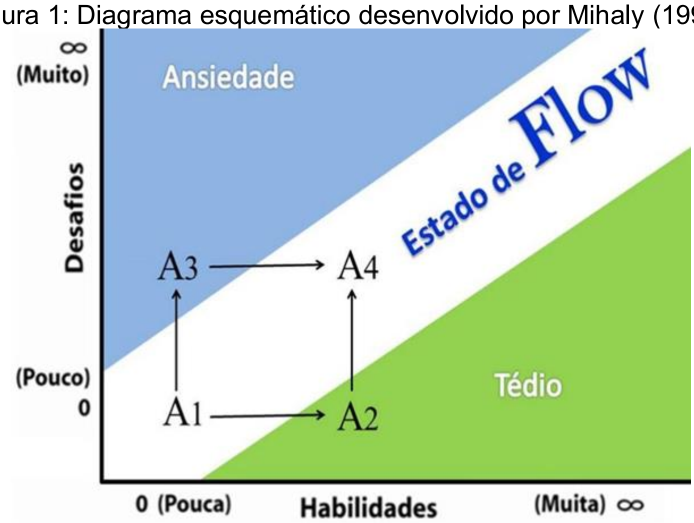
3.3. Benefícios e desafios da gamificação

Um desafio que o professor de matemática enfrenta é o desenvolvimento de competências necessárias para um pensamento matemático autônomo por parte do aluno. Essa sempre foi uma tarefa árdua e complexa, principalmente na sociedade contemporânea. Desta forma, apenas o método tradicional de ensino, como aulas meramente expositivas, por si só, já não é mais capaz de atender às demandas educacionais contemporâneas. Além disso, ainda há o problema da falta de motivação em sala de aula, sendo ele um desafio para o ensino de matemática.

Ademais, apesar da gamificação ter se mostrado uma alternativa promissora para promover motivação intrínseca, engajamento e sentimento de realização, um dos desafios na criação de ambientes gamificados é saber como estimular e relacionar efetivamente com a motivação. Uma aplicação efetiva da gamificação para alcançar resultados satisfatórios demanda um bom planejamento e um longo preparo, e para isso é necessário um aprofundamento teórico.

A Teoria do *Flow,* criada pelo psicólogo húngaro Mihaly Csikszentmihalyi em 1991, se propôs a explicar quais são os motivos que levam as pessoas a ficarem completamente envolvidas e concentradas em determinadas atividades que não proporcionam nenhum tipo de retorno material ou financeiro. Em síntese, esta teoria procura descrever o estado mental de operação automatizada, em que o sujeito está completamente imerso em uma sensação de foco energizante (profunda concentração, envolvimento e prazer) ao se envolver em uma atividade específica, na qual há equilíbrio entre o nível de dificuldade do desafio e a habilidade compatível do sujeito, de maneira que permita sua realização com êxito.

Figura 1: Diagrama esquemático desenvolvido por Mihaly (1991).



Fonte: Silva, Sales, Castro, 2019, p. 4

Conforme o diagrama ilustrado na figura anterior, há duas dimensões importantes (desafios e as habilidades) durante a experiência de Fluxo, ambas são representadas por eixos do diagrama.

Desta forma, ao iniciar as aulas, o professor deverá propor aos alunos um desafio básico que seja possível de ser realizado por um aluno que possui habilidade compatível (A1). Sendo assim, logo após a conclusão da atividade, o professor deverá proporcionar um novo desafio que exija um maior nível de habilidade do aluno. O novo desafio não poderá ser tão difícil, que leve o aluno ao estado de ansiedade (A3), e nem tão fácil que possa levá-lo ao tédio (A2).

Isso faz com que o professor tenha que lidar com essa fina linha de Flow, fazendo com que precise de tempo para sua análise e planejamento para determinar essa linha para assim conseguir fazer um “bom” jogo.

Para se alcançar o equilíbrio, toda atividade proposta, que apresenta desafios a serem cumpridos, deve pressupor que o sujeito tenha consciência de que tal atividade é possível de ser feita. Caso contrário, não é vista como um desafio, pois não apresenta sentido em ser realizada. Conforme Csikszentmihalyi (1990) cada pessoa possui um nível médio de desafios e habilidades. Assim, o estado de Flow passará a existir quando o aluno enfrentar desafios (situações-problema) diretamente proporcionais às suas habilidades.

Dessa forma, a gamificação possibilita que o aluno compreenda o objetivo da aula, investigue, faça suas atividades e obtenha sucesso pelo seu próprio esforço, a qual é uma das características das metodologias de aprendizagem ativas.

Mas, para o professor provisionar todas essas oportunidades, ele precisa saber do estado de Flow da sala, analisando as dificuldades que cada aluno possuiu e a dedicação a matéria que possuem, para que assim consiga desenvolver um jogo relacionado ao conteúdo da aula pelo qual os alunos consigam se interessar. Além disso, ele precisa de tempo para pensar em como vai funcionar, quais serão os desafios do jogo e os conteúdos necessários que os alunos precisam para jogar. Portanto, o professor precisa saber extensivamente das teorias que compõem essa metodologia, como exemplo, a Teoria do Flow, para que consiga desenvolver um plano de aula que cative seus alunos.

3.4. Aplicação da gamificação nas aulas

No primeiro semestre da disciplina de Metodologia e Prática do Ensino de Matemática do curso de Licenciatura em Matemática da Unioeste, aplicamos para uma turma de alunos as aulas no PROMAT - Curso preparatório de matemática voltado para alunos do Ensino Médio que pretendem ingressar no Ensino Superior. O projeto teve uma duração de 10 encontros de 3 horas e 40 minutos cada, os quais aconteceram aos sábados entre os dias dezesseis de setembro de dois mil e vinte três e vinte e vinte e cinco de novembro do mesmo ano.

Movidos pelo desafio de tornar as aulas mais atrativas e buscando fazer com que os alunos tenham participação ativa durante o processo de aprendizagem no decorrer das aulas do PROMAT, optamos pela utilização de jogos adaptados aos conceitos matemáticos como metodologia ativa, uma técnica pedagógica que se baseia em atividades instrucionais, capazes de engajar os estudantes e fazerem se tornarem protagonistas no processo de construção do próprio conhecimento

Esquivel (2017), enfatiza a prática como algo enriquecedor para a aula, pois promove a participação ativa dos alunos, valoriza seus conhecimentos prévios e ressignifica os erros transformando acontecimentos ruins em forma de aprendizado. Tendo em vista tal pensamento, podemos entender a utilização da gamificação em sala de aula como um ótimo recurso para o ensino de matemática. Uma vez que os conteúdos que envolvem a matemática são muitas vezes temidos pelos alunos por envolverem abstrações, os jogos ajudam a ter uma melhor visão de como aplicar os conceitos assim promovendo uma motivação para aprender matemática.

Com isso, em todos os encontros procuramos inserir atividades práticas tendo em vista a relevância que essas trazem para um melhor direcionamento da aula. Além disso, atribuímos doces como forma de recompensa para os alunos durante essas atividades, servindo como estímulo para o envolvimento nas atividades. Destacando em especial o sexto e o sétimo encontro, nos quais o uso dessa metodologia ativa foram os mais relevantes.

Durante a sexta aula, exploramos o conceito de função do segundo grau e optamos pela utilização de dois jogos para a fixação dos conteúdos. Nessa aula, tivemos como objetivos principais contextualizar como encontrar as raízes de uma função do segundo grau, entender como representar seu gráfico e identificar os elementos que o compõem.

Nas aulas anteriores, já havíamos introduzido o conceito de equação do segundo grau. Utilizamos esse conceito para mostrar que, para encontrar as raízes de uma função quadrática, basta igualá-la a 0, transformando-a assim em uma equação.

Para explorar esse conceito, motivando os alunos a tentarem encontrar as raízes de funções, utilizamos um jogo de dominó adaptado a equações do segundo grau. Cada peça do dominó era composta por uma função do segundo grau e as raízes de outra função. Os jogadores precisavam encontrar as raízes das equações das peças que tinham para saber se elas correspondiam às opções que estavam na mesa, dessa forma, promovendo a capacidade de resolver equações para encontrar as raízes de uma equação do segundo grau.

Percebemos que alguns alunos apresentaram dificuldades de início, mas com o desenvolver do jogo a partir do auxílio dos professores e até mesmo dos colegas, todos conseguiram compreender bem os conceitos envolvidos. Cada jogo tinha um total de 28 peças e como os alunos foram divididos em grupos de 4 pessoas cada um recebeu 7 peças, isso acabou provocando uma demora maior que a esperada para a finalização da atividade, já que cada aluno teve que resolver as 7 equações de segundo grau correspondentes as suas peças, o que acabou também os cansando, com isso percebemos que o ideal seria a utilização de menos peças por jogador nessa atividade.

Além disso, utilizamos também o “jogo do mico de funções do segundo grau”. Esse jogo é composto de 29 cartas, sendo que 14 delas são gráficos de funções, 14 são elementos como as raízes da função, o vértice do gráfico e o ponto onde o gráfico corta o eixo y que se associam as cartas representadas por gráficos, e a carta restante é representada pela letra grega e serve como uma espécie de coringa.

Nessa atividade, os alunos foram divididos em grupos de 4 pessoas, sendo que, inicialmente, 3 jogadores receberam 7 cartas e um jogador recebeu 8 cartas. Para proceder, eles deviam verificar se possuíam algum par correspondente dentre suas cartas. Em caso afirmativo, deviam abaixar esse par na mesa. O jogador à direita do que recebeu uma carta a mais devia pegar uma carta aleatória deste para tentar montar um par com suas cartas, após isso o próximo jogador rouba uma carta aleatória deste e assim sucessivamente. A carta coringa não corresponde a nenhuma outra, então serve apenas como uma carta extra para atrapalhar o jogo. Vence quem ficar sem nenhuma carta na mão primeiro.

Durante esse momento, os alunos apresentaram-se bem interessados e envolvidos, não tiveram muitas dificuldades em associar os elementos a seus respectivos gráficos. Ao mesmo tempo que tiveram oportunidade para utilizar os conceitos aprendidos na aula, foi possível um momento de "descontração" tornando a aula mais divertida e interessante. A boa funcionalidade do jogo fica evidente a partir do comentário de uma aluna: "Com certeza foi um dos jogos mais interativos, divertidos e que mais precisou utilizar os conceitos da aula para jogar".

No 7º encontro do PROMAT, exploramos os conceitos acerca do conteúdo de polinômios. Tendo em vista que esse é um conteúdo da matemática que não costuma ser muito explorado na escola e ser caracterizado como algo mais abstrato, nos preocupamos em tornar a aula o mais dinâmica possível, por isso elaboramos dois jogos para serem utilizados no decorrer da aula.

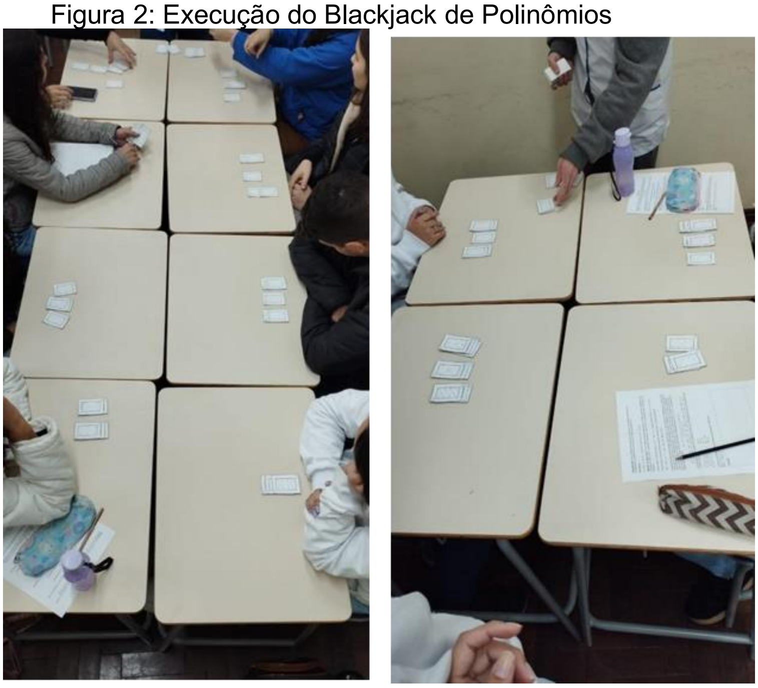
Primeiramente apresentamos as definições de monômio, binômio, trinômio e polinômio e os elementos que os compõem. Em seguida, apresentamos como pode ser realizada a operação de adição entre polinômios, para explorar melhor essa operação utilizamos uma adaptação do jogo "Blackjack".

No jogo original, são utilizadas cartas de baralho tradicionais. O valor da carta depende do seu número: as cartas de 2 a 9 valem o seu respectivo número, já as cartas "J", "Q" e "K" valem 10 pontos e a carta "ás" vale 1 ou 11, o jogador que decide. O objetivo do jogo consiste em somar mais pontos que o *dealer* sem ultrapassar 21. Inicialmente o *dealer* distribui 2 cartas para cada jogador e o jogo começa por quem está à direita dele, que deve verificar a pontuação que tem com suas duas cartas iniciais e decidir se vai pedir mais cartas ou se vai parar e manter a pontuação, lembrando que deve tomar cuidado para que não ultrapasse 21 pontos pois caso isso aconteça está fora do jogo. O *dealer* é sempre o último a jogar, a ideia é que todos os jogadores jogam contra ele, então para que os outros vençam, eles devem ter tido a pontuação maior que a do *dealer*.

Na adaptação que criamos, o "Blackjack dos polinômios", as regras são as mesmas do jogo original, porém os naipes são representados por monômios de graus 1, 2 e 3. Com essa atividade, conseguimos melhor promover a fixação do conteúdo de adição de polinômios, pois os alunos precisaram observar que, para somar duas cartas nesse jogo, era necessário que os monômios possuíssem o mesmo grau. Além disso, o jogo trabalha com a ideia do coeficiente dos monômios, pois seu objetivo é tornar os coeficientes dos monômios resultantes da soma o mais próximo de 21 para vencer o *dealer*, que no caso era um dos professores.

Essa prática foi um ótimo recurso para aula. Os alunos se mostraram muito interessados em praticar o jogo e ao mesmo tempo puderam entender melhor como realizar a adição de monômios. Além disso, os alunos também apresentaram bastante interação com essa atividade, ajudando e dando dicas uns aos outros.

Figura 2: Execução do Blackjack de Polinômios

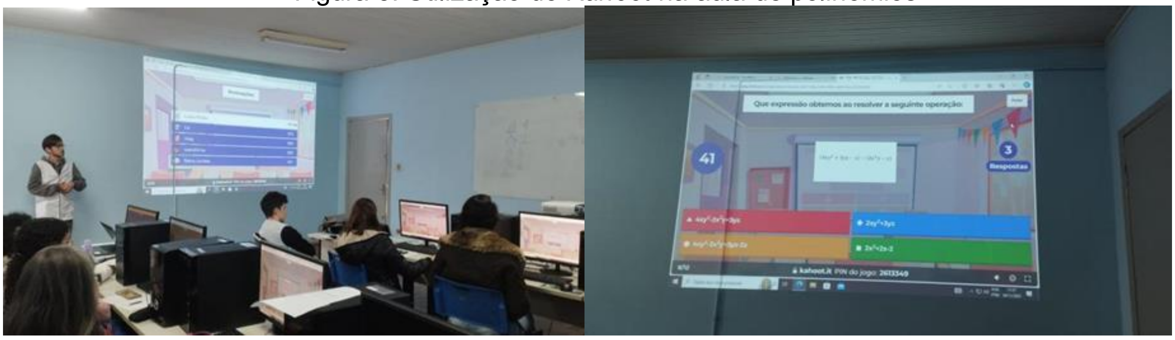


Fonte: Acervo dos autores (2023)

Após isso, nós direcionamos ao laboratório de informática, onde fizemos a utilização do Kahoot, aplicativo no qual é possível a criação de questionários interativos. Para esse quiz, preparamos perguntas que envolvessem todos conceitos e operações acerca de polinômios introduzidos na aula. Procuramos desenvolver exercícios que explorassem o conteúdo e que pudessem ser respondidos de maneira relativamente rápida, de forma a evitar que os alunos passassem muito tempo realizando cálculos.

O Kahoot foi um ótimo recurso para fixar o conteúdo, gerou bastante interação e competitividade entre os estudantes. Os alunos se mostraram eufóricos durante a realização dos exercícios, respondiam as questões rapidamente sem pensar muito, por isso cometeram diversos erros ao “cair em pegadinhas” que havia nos exercícios. Apesar disso, a atividade gerou um clima de diversão e descontração para a aula.

Figura 3: Utilização do *Kahoot* na aula de polinômios



Fonte: Acervo dos autores (2023)

No geral, conseguimos perceber que a utilização de jogos foi algo muito relevante para as aulas. Ao mesmo tempo que promoveu a internalização dos conteúdos, também gerou momentos de diversão e interação, tornando as aulas mais dinâmicas e atrativas.

3.5. Questionário

Podemos comprovar a boa funcionabilidade dessa metodologia ativa a partir dos relatos dos alunos. Propomos um questionário online para saber a opinião deles quanto às aulas interativas envolvendo jogos e as respostas confirmam que essa prática é bem-vista pelos alunos. O questionário era composto por 3 perguntas e 7 alunos responderam.

No primeiro item do questionário, perguntamos em uma escala de 1 a 10 o quão relevante acham a utilização de jogos para o ensino de Matemática, 5 alunos votaram “10”, 1 aluno respondeu “9” e um respondeu “5”.

No segundo item, “você acha que a utilização de jogos contribui para um melhor entendimento dos conteúdos ou vê apenas como uma forma de deixar a aula mais divertida?”, obtivemos diversas respostas satisfatórias, uma aluna respondeu: “Como aluna, achei essenciais os jogos no ensino da matemática, oferecendo uma abordagem prática e bem envolvente. Estimulou muito meu pensamento lógico, a resolução dos problemas se tornou um aprendizado beeem [sic] mais divertido, e com certeza uma forma muito mais leve para obtenção de conhecimento!!”, outra disse: “Com os jogos você consegue colocar em prática o que aprendeu na aula e ter certeza que entendeu o conteúdo então colocar jogos nas aulas é de extrema importância para a confirmação do aprendizado do aluno.”, outra ainda relatou: “É evidente que, cada indivíduo absorve conhecimento de diferentes formas, alguns lendo, outros ouvindo e alguns praticando. Portanto, a utilização dos jogos juntamente às teorias das aulas, são muito benéficas para fortalecer o entendimento do aluno em relação ao tema abordado. Os jogos, além de reforçarem o que foi estudado, também auxiliam na interatividade, participação e compreensão do que está sendo estudado. Portanto, é perceptível que, a utilização dos jogos é um fator que contribui muito para o melhor entendimento do conteúdo por parte dos alunos”.

No terceiro item do questionário, perguntamos aos alunos como eles acharam que a utilização de jogos influenciou nas aulas do PROMAT, onde obtemos retorno positivo, destacando as seguintes respostas: “As aulas dinâmicas de matemática utilizando jogos, foi uma ideia muito criativa, foi verdadeiramente importante para o meu aprendizado! A abordagem envolvente e prática tornou o aprendizado mais acessível, despertou meu interesse e facilitou a compreensão dos conceitos. Parabéns pelo excelente trabalho de vocês, professores, em criar um ambiente educativo tão estimulante. A abordagem da gamificação foi extremamente importante, um método muito mais leve e divertido, um jeito "fácil" de aprender matemática, e com a ajuda e paciência de vocês, se tornou mais legal ainda. Agradeço por terem usado esse método, e desejo sucesso na carreira de vocês! Ass.: Aluna, Lizi”; “Maravilhoso, eu amo jogo por serem lúdicos e ao mesmo tempo entender as lacunas do conteúdo”; “Trouxe interação entre os alunos. Proporcionou mais lucidez em conteúdos considerados mais difíceis, e corroborou para que os alunos tivessem interesse nas aulas.”; “Sinceramente, eu gostei bastante de aprender com os jogos, tornou uma matéria considerada chata por muitas pessoas, em algo legal de ser trabalhado e entendido, de modo tranquilo e inclusivo”

3.6. Considerações finais

Diante do exposto, é possível notar que a Gamificação é uma metodologia extremamente trabalhosa, visto que exige um alto planejamento e preparação por parte do docente em numerosos fatores, como: elaboração de regras e adaptações que se baseiam na teoria do Flow, compra de materiais para confecção de baralhos e tabuleiros a serem utilizados, o tempo que tais atividades demandarão (as quais geralmente são demoradas, tendo em vista que deve haver a explicação das regras, depois a prática do jogo e por fim a apuração dos resultados da turma) etc. Entretanto, quando bem executada, ela passa a ser uma das maneiras preferidas de aprendizagem para os alunos.

O método fornece a eles a possibilidade de aprender o conteúdo (“obrigação” deles na escola) de maneira divertida e sempre com a interação entre amigos. Essa socialização decorrente de práticas ativas pelos estudantes é o principal motivo pelo qual a Gamificação é uma prática de ensino eficaz e deve sempre ser prioridade no ensino a fim de que os alunos se sintam mais felizes em irem para a escola, o que acarreta um melhor desempenho dos estudantes.

3.7. Referências:

IBERDROLA. Disponível em: https://www.iberdrola.com/talentos/o-que-e-gamificacao. Acesso em 27 nov. 2023.

SILVA, J. B. DA; SALES, G. L; CASTRO, J. B. DE. Gamificação como estratégia de aprendizagem ativa no ensino de Física. **Revista Brasileira de Ensino de Física,** v. 41, n. 4, p. e20180309, 2019. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rbef/a/Tx3KQcf5G9PvcgQB4vswPbq/#. Acesso em: 27 nov. 2023.

ESQUIVEL, H. C. R. Gamificação no Ensino da Matemática: uma experiência no ensino fundamental. (Dissertação). Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Instituto de Ciências

Exatas, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Seropédica (RJ), 2017. Disponível em: https://tede.ufrrj.br/jspui/handle/jspui/2552. Acesso em: 28 nov. 2023.

CSIKSZENTMIHALYI, M. **Flow**: The Psychology of Optimal Experience. Nova Iorque: Harper Collins, 1990.

BUSARELLO, R. I. *et al*. A gamificação e a sistemática de jogo. **In**: FADEL, L. M. et al. (Org.). Gamificação na educação. São Paulo: Pimenta Cultural, 2014. Disponível em: https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=r6TcBAAAQBAJ. Acesso em: 28 nov. 2023

FONTOURA, J. Como é a educação na Finlândia? **Revista Educação**, 2017. Disponível em: https://revistaeducacao.com.br/2017/06/08/como-e-educacao-na-finlandia/. Acesso em: 28 nov. 2023.

ROSA, A. C. M. *et al.* Ensino e educação: uso da gamificação na matemática. **Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento**. Ano 06, Ed. 05, Vol. 08, pp. 40-68. maio de 2021. ISSN: 2448-0959. Disponível em: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/educacao/gamificacao-na-matematica. Acesso em: 28 nov. 2023.

4. Cronograma

Quadro 1: Cronograma dos encontros e conteúdos trabalhados

Encontro	Data	Conteúdos
1	16/09/2023	Fração (Operações), Razão e Operação
2	23/09/2023	Raíz, Potenciação, Conj. Numéricos.
3	30/09/2023	Equação do 1º e 2º grau
4	07/10/2023	Sistemas de equações
5	14/10/2023	Função Afim
6	21/10/2023	Função Quadrática
7	04/11/2023	Polinômios
8	11/11/2023	Geometria: Triângulos e polígonos
9	18/11/2023	Geometria: Área, Perímetro, Circunferência)
10	25/11/2023	Gincana de encerramento

Fonte: Autores (2023)

5. Encontro 1

5.1. Plano de Aula 16/09/2023

Público-alvo: Alunos inscritos no Promat

Conteúdos: Fração, razão e proporção

Professores: Fabricio Rustick / Felipe Augusto Klumb / Felipe Simão / Milleni Ferreira

Objetivo Geral:

Compreender os conceitos de fração, razão e proporção e suas aplicações

Objetivo Específico:

Identificar as operações envolvendo Frações;

Identificar atividades de razão e proporção

Tempo de execução: Uma aula do Promat (3h40)

Recurso didático: Projetor, folha sulfite, giz, balança, embalagens de alimentos, açúcar.

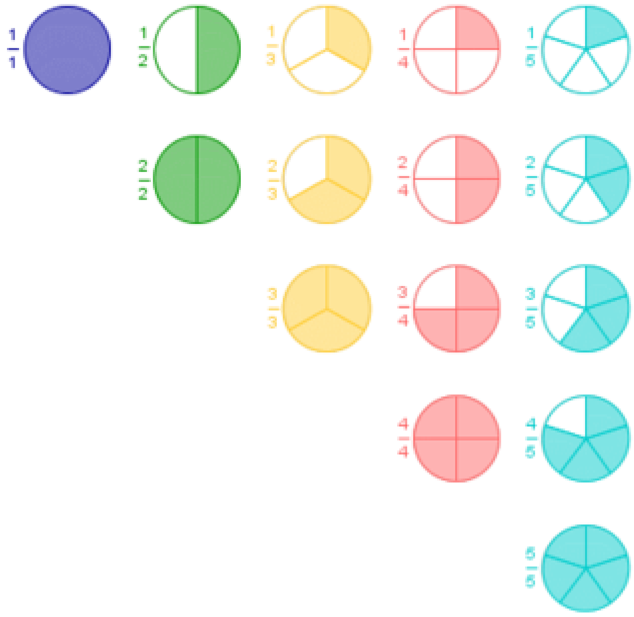
Metodologia de encaminhamento:

Iremos começar a aula nos apresentando, citando nossos nomes, turma e planos futuros, em seguida iremos pedir para os alunos formarem duas filas para que eles participem do quiz. (1 hora).

Regras do Quiz: serão feitas duas filas com quantidade igual de pessoas. Será chamado um aluno por vez de cada fila para que eles participem da gincana. Eles irão para frente da lousa, onde haverá uma mesa com uma garrafa de água sobre ela e a disponibilidade de usar o quadro para cálculos. Será projetada no slide uma pergunta que deve ser respondida por um dos dois: aquele que pegar a garrafa de água primeiro ganha o direito à resposta. Se o aluno que agarrou a garrafinha responder corretamente, ele ganha. Caso contrário, perde. O vencedor ganhará um bombom e o perdedor ganhará um pirulito. Caso nenhum dos dois consiga responder à pergunta depois do tempo proposto, será aberta a possibilidade para o restante da turma tentar responder. Se alguém da turma responder corretamente, essa pessoa e a dupla que foi para a frente da sala ganham um pirulito cada.

Após a gincana, quando os alunos estiverem sentados em seus grupos (que será formado pela organização das cadeiras), começaremos a revisar a representação geométrica através de uma figura e comentaremos sobre fração própria, imprópria e número misto.

Figura 4: Representação de frações



Fonte: acervo dos autores (2023)

Definição:

O que é fração? - Toda Matéria (todamateria.com.br)

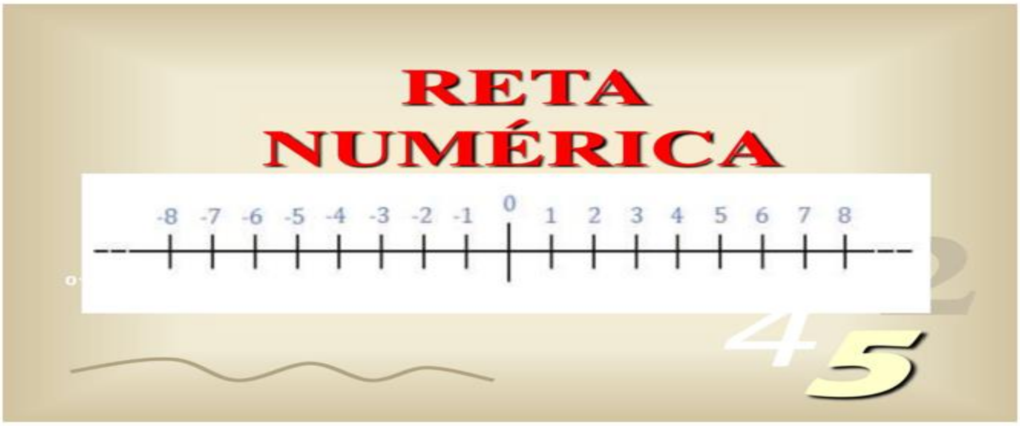
Fração própria: Representa parte de um inteiro, seu numerador é menor que o denominador

Fração imprópria: É a fração que o numerador é maior que o seu denominador e pode ser zero, ela representa o zero, o inteiro e mais que o inteiro. (Ex 0/3, 3/3, 5/3)

Número misto: As frações impróprias que representa mais que um inteiro pode ser representada na forma mista: $\frac{6}{4} = 1\frac{2}{4}$

Logo após, mostraremos também a ideia de que toda fração pode ser vista como uma operação de divisão entre o numerador e o denominador. Será feita uma comparação e uma correlação entre essas duas maneiras de se interpretar uma fração. Por meio da imagem de uma reta numérica projetada nos slides, será explicado que uma figura inteira representa uma parte da reta.

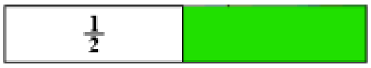
Figura 5: slide utilizado para mostrar o conceito de reta numérica



Fonte: SLIDESHARE. Disponível em: https://pt.slideshare.net/ryldon/reta-numrica-7-ano-professor-ryldon. Acesso em 28 nov. 2023.

Sendo assim, qual número da reta representaria uma figura não inteira? Por exemplo, sobre qual número ficaria metade da figura? R: 0,5

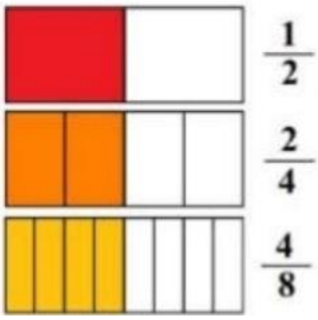
Figura 6: Representação de 1/2



Fonte 1:

Após essa introdução, serão abordadas as frações equivalentes. Então, repartiremos todos os pedaços da figura em outras duas partes para, agora, obter a fração 4/8. Como a parcela do inteiro representada pela figura não se alterou, levaremos os alunos a concluírem que as duas frações são iguais. Retomando o que foi passado há pouco, mostraremos a eles que as duas operações de divisão relativas às frações possuem o mesmo resultado, as figuras serão mostradas através dos slides.

Figura 7: Frações equivalentes a 1/2



Fonte 2: acervo dos autores (2023)

Em seguida trabalharemos as regras de adição e subtração.

Definição:

Adição com denominadores iguais: Adicionamos os numeradores e mantemos os denominadores, pois os inteiros estão divididos na mesma quantidade de partes.

Adição com denominadores diferentes: Para a adição de duas frações com denominadores diferentes, achamos um múltiplo mínimo comum aos denominadores, reduzimos as frações a esse denominador comum e somamos.

Multiplicação: Multiplicamos numerador com numerador e denominador com denominador.

Entregaremos uma folha com um exemplo de cada e pediremos para a turma resolver. (5 min)

Exemplos

Soma com denominadores iguais:

$$\frac{7}{15}+\frac{3}{15}=\frac{10}{15}$$

Soma de denominadores diferentes:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{5}{15}+\frac{3}{15}=\frac{8}{15}$$

Multiplicação de fração:

$$\frac{8}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{24}{35}$$

Resolveremos os exercícios com a turma, questionando como eles resolveram. Após isso, passaremos sobre a subtração e divisão e faremos o mesmo procedimento.

Definição:

Subtração com denominadores iguais: Subtraímos os numeradores e mantemos os denominadores, pois os inteiros estão divididos na mesma quantidade de partes

Subtração com denominadores diferentes: Para a subtração de duas frações com denominadores diferentes, achamos um múltiplo mínimo comum aos denominadores, reduzimos as frações a esse denominador comum e subtraímos.

Divisão: Invertemos uma das frações e multiplicamos.

Exemplos

Subtração com denominadores iguais:

$$\frac{8}{9}-\frac{5}{9}=\frac{3}{9}$$

Subtração com denominadores diferentes:

$$\frac{4}{6}-\frac{1}{2}=\frac{8}{12}-\frac{6}{12}=\frac{2}{12}$$

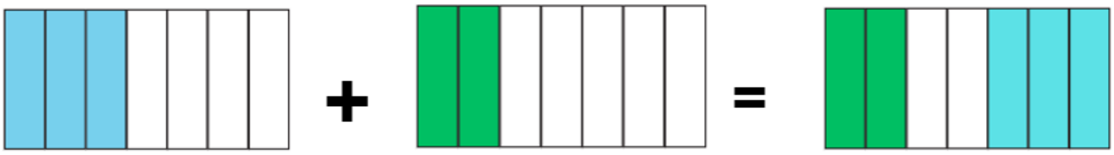
Divisão:

$$\frac{4}{5}\div\frac{2}{4}=\frac{4}{5}\times\frac{4}{2}=\frac{16}{10}$$

Tendo resolvido os quatro exercícios, perguntaremos aos alunos se eles sabem de onde são provenientes as regras que acabaram de usar, explicaremos novamente através de imagens projetadas o porquê usamos essa maneira para calcular.

Para mostrar a operação de adição entre duas frações, primeiramente compararemos duas figuras divididas em mesmo número de partes. Mostraremos que a ideia da adição é somar as figuras unindo-as em uma nova figura.

Figura 8: Representação da soma de frações (1)

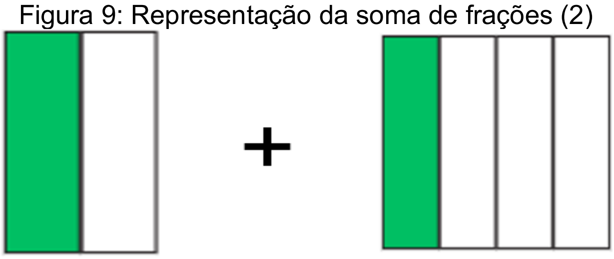


Fonte: acervo dos autores (2023)

Pediremos para que os alunos formulem uma representação de adição de fração, esperamos que eles vejam que o denominador é o mesmo das outras duas e que o novo numerador é a soma dos dois numeradores anteriores.

Agora, mudaremos o cenário para a soma de duas figuras divididas em números diferentes. Incentivaremos os alunos para que eles, com base no que já viram, tentem achar qual deve ser a fração que representa a nova figura.

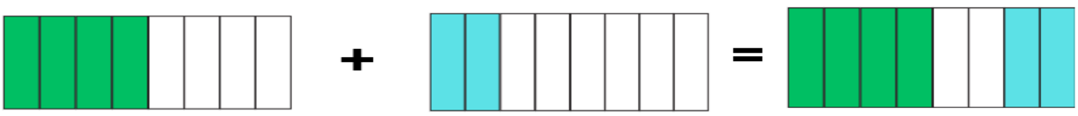
Figura 9: Representação da soma de frações (2)



Fonte: acervo dos autores (2023)

Figura 10: Representação da soma de frações (3)

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{4}{8}+\frac{2}{8}=\frac{6}{8}$$



Fonte: acervo dos autores (2023)

Conforme a necessidade, os professores vão dando pequenas dicas aos alunos para que eles consigam desenvolver seu pensamento.

Dicas:

- “Nós já sabemos como lidar com o caso em que o número de repartições da figura é igual. Não seria possível transformar o cenário atual no cenário anterior?”
- “Por meio da manipulação das frações equivalentes, conseguimos ‘transformar’ o denominador de qualquer fração em qualquer número que quisermos. Como isso seria útil no tratamento do problema?”
- (para aqueles que já resolveram) “Você alterou os denominadores das frações relacionadas com as figuras, tornando-os iguais para poder realizar a soma. O que isso representa, geometricamente?”

Depois dessa discussão, os professores escreverão no quadro a fórmula geral dessa operação, recapitulando os conceitos enquanto os abstraem. É importante salientar aos alunos a não-obrigatoriedade do cálculo do mínimo múltiplo comum entre os dois denominadores, visto que muitos estudantes aprendem dessa forma no ensino fundamental e pensam, erroneamente, que esse é um passo imprescindível no cálculo.

Ao voltar do intervalo, passaremos uma questão sobre razão e proporção. Perguntaremos para os alunos se eles sabem qual é a diferença entre esses dois conceitos e como eles resolveriam cada uma das questões propostas.

Questões:

Razão: Em um teste de matemática com 15 questões, Eduarda acertou 12. Qual foi o aproveitamento de Eduarda no teste?

$$\frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

Essa razão significa que, de cada 5 questões, Eduarda acertou 4. Sendo assim, o seu aproveitamento foi de 80%

Proporção: Determine o valor de x :

$$\frac{x}{7} = \frac{9}{63}$$

Resolução:

$$\boldsymbol{\frac{x}{7} = \frac{9}{63} \qquad = 63x = 63 \qquad x = \frac{63}{63} \; x = 1}$$

Logo após iremos definir o que é razão e proporção:

Definição:

Razão: Estabelece uma comparação entre duas grandezas. **Proporção:** Igualdade de duas razões **Proporcionalidade direta:** O corre quando a variação de uma interfere na variação da outra na mesma proporção **Proporcionalidade inversa:** Ocorre quando o aumento de uma diminui a outra.

Após as definições acerca de razão e proporção, os professores irão iniciar uma discussão mais detalhada sobre o que é razão e o que é proporção. Será dito aos alunos que "razão" é a relação entre duas partes de subconjunto de disjuntos, sendo então um novo sinônimo para as palavras "divisão" e "fração". Os professores discutirão o fato de que cada uma dessas palavras foca em um aspecto distinto de um mesmo ente matemático. A palavra "divisão" foca na operação em si. Já a palavra "fração" foca na representação algébrica da parte de um todo. Por fim, a palavra "razão" tem como enfoque a comparação entre os tamanhos do numerador e do denominador de uma fração.

Feito isso, será explicado que uma proporção nada mais é do que uma igualdade entre duas razões (ou frações). Será explicitada para os alunos a ideia do porquê chamarmos tal igualdade de "proporção": devido ao fato de que os tamanhos relativos entre o numerador e o denominador das mesmas frações são iguais.

Tendo discutido os conceitos de razão e proporção, serão trabalhados alguns exemplos práticos do dia a dia dos alunos. O primeiro deles é com relação à culinária. Será trabalhada a ideia de que é possível aumentar o rendimento de qualquer receita se aumentarmos os ingredientes na mesma proporção.

O segundo exemplo a ser trabalhado são as informações nutricionais presentes em embalagens de alimentos. Os professores usarão como exemplo a barra de chocolate branco laka de 165 gramas. Em sua embalagem, há a informação que, em cada 25 gramas de chocolate, há 15 gramas de açúcares. Sendo assim, será solicitado que os alunos calculem a quantidade de açúcar presente na barra toda. Eles deverão fazer isso por meio de uma proporção envolvendo a razão presente na tabela (15:25). Após isso, os professores utilizarão uma balança para medir a quantidade de açúcar encontrada como resposta e colocarão esse açúcar em um copo transparente ao lado da barra de chocolate. O intuito é mostrar para eles a grande quantidade de açúcar presente. O mesmo procedimento será feito com uma lata de coca cola e com um pacote de pão de forma.

Finalizada a explicação do conteúdo, os professores aplicarão uma lista de exercícios para os alunos resolverem. Essa lista abrangerá todo o conteúdo visto na aula, desde frações até razão e proporção. Os professores darão um tempo para que os alunos resolvam por conta própria e, passados alguns minutos do início da atividade, eles irão começar a caminhar entre as mesas perguntando para os alunos como eles resolveram algumas questões. O intuito dessa ação é a de incentivar os alunos a pedirem ajuda com aquilo que não compreenderam direito.

5.2. Material Entregue:

Frações:

- **Frações próprias:** Representa ________________________________. O________________ é maior que o denominador.
- **Frações Impróprias:** O numerador é ________________________ ao denominador, o numerador pode ser _______.
- **Frações mistas:** Representa ________________________________.
- **Frações** ___________________: Representa a mesma quantidade de uma unidade.

Anotações:____
____
____

Adição de Fração: Adicionamos os ___________________ e mantemos os ____________________;

Exemplo:

$$\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{10}} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{10}} =$$

Adição com denominadores diferentes: Para a soma de suas frações com denominadores diferentes, achamos um ____ aos denominadores, reduzimos as frações a esse denominador comum e somamos.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} =$$

Subtração de Fração: Subtraímos os __________________ e mantemos os denominadores;

$$\frac{\mathbf{18}}{\mathbf{11}} - \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{11}} =$$

Multiplicação de Fração: Multiplicamos numerador com ______________ e denominador com _________________;

$$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} =$$

Divisão de fração: Invertemos uma das frações e _______________.

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \div \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} =$$

Razão e proporção:

Razão: Estabelece uma _______________ entre __________________________.

$$\frac{A}{B}$$

Proporção:_________________ de duas razões.

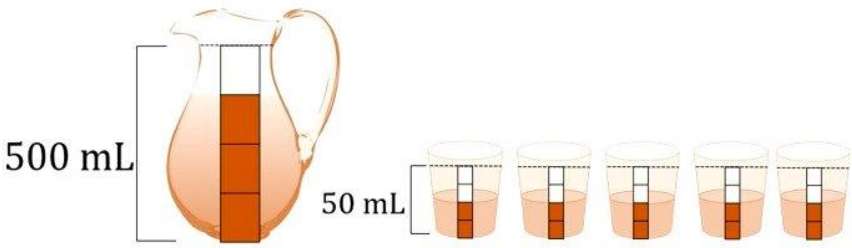
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Proporcionalidade direta: Ocorre quando a variação de uma ____ na mesma proporção.

Proporcionalidade inversa: Ocorre quando o aumento de uma ____________________________.

5.3. Lista de Exercícios:

1- Mário preencheu 3/4 de uma jarra de 500 ml com refresco. Na hora de servir a bebida, ele distribuiu o líquido igualmente em 5 copos de 50 ml, ocupando 2/4 da capacidade de cada um. Com base nestes dados responda: que fração de líquido restou na jarra?



a) 1/4
b) 1/3
c) 1/5
d) 1/2

2/4 de 50 ml são 25 ml em cada copo, totalizando um total de 125 ml que foram servidos. A quantidade inicial de suco que havia na jarra era ¾ de 500 ml, ou seja, 375 ml. Operando 375 – 125, obtemos que sobraram 250 ml na jarra. Logo, a fração que representa a quantidade de suco é $\frac{250}{500} = \frac{1}{2}$.

2- (ENCCEJA) Um jardineiro foi contratado para colocar grama em um terreno. No primeiro dia, ele colocou grama em metade do terreno, deixando o restante para fazer posteriormente. No segundo dia, chegou atrasado ao trabalho e colocou grama apenas na metade da parte que restou sem grama após o primeiro dia.

Qual é a fração que representa a parte do terreno que ainda está sem grama após esses dois dias de trabalho?

½ + 1/4= ¾

4/4 - 3/4= 1/4

3- Uma agência de viagens de São Paulo (SP) está organizando um pacote turístico com destino à cidade de Foz do Iguaçu (PR) e fretou um avião com 120 lugares.

Do total de lugares, reservou **2/5** das vagas para as pessoas que residem na capital do estado de São Paulo, **3/8** para as que moram no interior desse estado e o restante para as que residem fora dele.

Quantas vagas estão reservadas no avião para as pessoas que moram fora do estado de São Paulo?

a)27
b)40
c)45
d)74
e)81

2/5 de 120 lugares são $\frac{2 \cdot 120}{5} = 48$ lugares. 3/8 de 120 lugares são $\frac{3 \cdot 120}{8} = 45$ lugares. Sendo assim, a quantidade de lugares destinados a pessoas de outros estados pode ser calculada por: $120 - 48 - 45 = 27$.

4- André, Carlos e Fábio estudam em uma mesma escola e desejam saber quem mora mais perto da escola. André mora a cinco vinte avos de um quilômetro da escola. Carlos mora a seis quartos de um quilômetro da escola. Já Fábio mora a quatro sextos de um quilômetro da escola.

A ordenação dos estudantes de acordo com a ordem decrescente das distâncias de suas respectivas casas à escola é

a) André, Carlos e Fábio.
b) André, Fábio e Carlos.
c)Carlos, André e Fábio.
d)Carlos, Fábio e André.
e) Fábio, Carlos e André.

Vamos comparar as três frações. Se escrevermos todas elas com o mesmo denominador, aquela que possuir o maior numerador será a maior. O m.m.c. entre os três denominadores é 60, portanto, podemos escrever que André mora a uma distância de $\frac{5}{20} = \frac{15}{60}$ km da escola. Carlos mora a $\frac{6}{4} = \frac{90}{60}$ km da escola e Fábio a $\frac{4}{6} = \frac{40}{60}$ km. Sendo assim, André mora mais perto e Carlos mora mais longe.

5- (UECE) José possui um automóvel que, em uma rodovia, percorre exatamente 12 km com um litro de gasolina. Certo dia, depois de percorrer 252 Km na mesma rodovia, José observou que o ponteiro indicador de combustível que antes marcava 5/6 da capacidade do tanque de combustível estava indicando 7/30 da capacidade do tanque. Assim, é correto concluir que a capacidade do tanque, em litros, é:

A)40
B)35
C)30
D)45

Nessa viagem, José gastou $\frac{252}{12} = 21$ litros de combustível. A quantidade de gasolina gasta também pode ser escrita como sendo a fração inicialmente cheia do tanque menos a fração indicada ao final, ou seja: $\frac{5}{6} \cdot T - \frac{7}{30} \cdot T = \frac{25T}{30} - \frac{7T}{30} = \frac{18T}{30} = \frac{3T}{5}$. Logo, temos que essas duas quantidades são iguais e achamos a capacidade máxima do tanque T em litros como sendo:

$$\frac{3T}{5} = 21 \Rightarrow T = 35$$

6- (UECE) Uma turma do Colégio São Bento tem, ao todo, 28 alunos cujas idades variam entre 9, 10 e 11 anos. Sabendo que 3/4 dos alunos têm menos de 11 anos de idade e que 5/7 dos alunos têm mais de 9 anos de idade, quantos alunos da turma tem 10 anos? 13

Vamos chamar de N_9, N_{10} e N_{11} o número de alunos com 9, 10 e 11 anos, respectivamente. Sabemos que $N_9 + N_{10} = \frac{3}{4} \cdot 28 = 21$ e $N_{10} + N_{11} = \frac{5}{7} \cdot 28 = 20$. Logo, temos que

$$(N_9 + N_{10}) + (N_{10} + N_{11}) = 21 + 20 = 41$$
$$(N_9 + N_{10} + N_{11}) + N_{10} = 41$$
$$28 + N_{10} = 41$$
$$N_{10} = 13$$

7- Em uma disputa entre carros de corrida um competidor estava a 2/7 de terminar a prova quando sofreu um acidente e precisou abandoná-la. Sabendo que a competição foi realizada com 56 voltas no autódromo, em que volta o competidor foi retirado da pista?

a) 16ª volta
b) 40ª volta
c) 32ª volta
d) 50ª volta

2/7 de 56 voltas são 16 voltas. Sendo assim, faltavam 16 voltas para ele completar a prova. Logo, a quantidade de voltas que o corredor já havia realizado era de $56 - 19 = 40$

8- (UNICENTRO) A organização dos Jogos Olímpicos movimenta números impressionantes. Está prevista para a Olimpíada do Rio 2016 uma frota de 5 mil carros e 1,6 mil ônibus oficiais que vão rodar 26 milhões de km durante os jogos.

(Adaptado de: <http://www.gazetadopovo.com.br/esportes/olimpiadas/2016/olimpiada-distribuira-306-medalhas-confira-as-curiosidades-da-rio-2016-ebs7ghcfwbt2p0kx8z3qeonke#ancora>. Acesso em: 16 set. 2015.)

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a razão entre a quantidade de países prevista para participar dessa Olimpíada e a quantidade de países prevista para participar da Paraolimpíada em 2016.

A)23/17
B)21/73
C)52/87
D)34/29
E)51/29

Serão 204 países na olimpíada e 174 países na paraolimpíada. Logo, a razão entre esses dois valores é de $\frac{204}{174}$. Simplificando, temos que $\frac{204}{174} = \frac{102}{87} = \frac{34}{29}$.

9- Em uma granja, o frango passa por várias etapas e em cada uma delas a quantidade de comida que ele recebe é diferente. Sabendo-se que o crescimento de um frango leva 40 dias e que são utilizados 8 610 kg para alimentar 12 300 frangos nesse período. Ainda nesse mesmo prazo, qual seria a quantidade de ração necessária para alimentar 20 000 frangos?

As grandezas envolvidas (número de frangos e quantidade de ração) são diretamente proporcionais. Sendo assim, podemos montar a seguinte igualdade entre os valores:

$$\frac{8.610}{x} = \frac{12.300}{20.000}$$

Em que x é o valor que buscamos. Isolando-o, obtemos:

$$123x = 8.610 \cdot 200$$

$$x = \frac{1.722.000}{123} = 14.000$$

10- Em um ambiente controlado, a quantidade de borboletas é inversamente proporcional à quantidade de libélulas. Foi realizada uma contagem e constatou-se que existem 80 libélulas e 600 borboletas neste ambiente. Se, em seguida, forem introduzidas mais 20 libélulas e deseja-se manter a razão inicial entre as populações estável. Qual é a quantidade de borboletas que deve ser deixada no ambiente controlado para que isso aconteça?

A razão inicial entre borboletas e libélulas é de $\frac{600}{80}$. Após a introdução das libélulas, ficamos com 100 libélulas. Para determinar a quantidade de borboletas correspondentes, devemos utilizar o fato de que as grandezas são inversamente proporcionais e escrever:

$$\frac{600}{x} = \frac{100}{80}$$

$$x = \frac{48000}{100} = 480$$

Portanto, a quantidade de borboletas deve ser 480.

5.4. Referências:

TODAMATERIA. Disponível em: O que é fração? - Toda Matéria (todamateria.com.br) Acesso em: 14 set.2023

QCONCUROS. Disponível em :https://www.qconcursos.com/questoes-do-enem/disciplinas/matematica-matematica/fracoes-e-numeros-decimais/questoes?page=2. Acesso em: 14 set. 2023.

WORDWALL. Disponível em: https://wordwall.net/resource/4206955/raz%C3%A3o-e-propor%C3%A7%C3%A3o. Acesso em: 14 set. 2023.

PEDAGOGIAAOPEDALETRA: Disponível em: https://pedagogiaaopedaletra.com/atividades-didaticas-fracao/. Acesso em: 14 set. 2023.

5.5. Relatório Aula 1

Na aula estavam presentes 25 alunos, entre eles apenas 4 eram meninos. Antes que os alunos chegassem já havíamos organizado as carteiras de forma que os alunos realizassem a aula em grupos de quatro pessoas. No início da aula utilizamos um quis relacionado a conceitos básicos sobre frações para sabermos o conhecimento prévio que eles tinham em relação a esse conteúdo. Para cada rodada participavam dois alunos, as perguntas eram projetadas no multimídia e intercaladamente nós estagiários líamos em voz alta. Enquanto os alunos estavam respondendo o quiz, foi necessário explicar duas questões que tiveram dificuldades. Em uma era necessário comparar frações e determinar qual representava o maior número, e em outra era necessário realizar a adição de duas frações. Ao fim de cada rodada solicitamos que os alunos que participaram se apresentassem, pedimos que falassem o nome, e caso quisessem comentar algo mais como o porquê decidiu se inscrever para o PROMAT, poderiam se sentir à vontade, apenas um aluno não quis se apresentar. Nesse momento vários alunos comentaram que tinham grandes dificuldades em matemática e que se inscreveram para o PROMAT com o objetivo de aprender mais sobre e se preparar para vestibulares e concursos.

Começamos com as definições sobre frações próprias e impróprias. Quando falamos sobre número misto os alunos apresentaram um pouco de dificuldade para entender o conceito. Em seguida foi explicado sobre a adição com denominadores iguais e diferentes, percebemos que muitos alunos tinham dificuldades para compreender o processo de resolução, por isso explicamos por diversas vezes, inclusive utilizando duas formas, utilizando o m.m.c. e o método da borboleta.

Falamos sobre a multiplicação e sobre a subtração com denominadores iguais e diferentes, um grupo apresentou algumas dúvidas que foram respondidas logo em seguida, exploramos então sobre a multiplicação e divisão envolvendo frações. Foi revisado os conceitos estudados até o momento a partir da representação geométrica de frações. Em seguida explicamos os conceitos acerca do conteúdo de razão e proporção, utilizando exemplos para um melhor entendimento.

Solicitamos que os alunos resolvessem a lista de exercícios que foi entregue ao início da aula, os acompanhamos individualmente, suprindo dúvidas assim que solicitavam nossa ajuda. Depois que a maioria dos alunos já havia resolvido a maior parte dos exercícios fizemos a correção deles no quadro, solicitamos que caso alguém se sentisse à vontade poderia estar compartilhando a sua solução com a turma, e em todos os exercícios alunos se voluntariaram a ir ao quadro mostrar sua solução para o problema, inclusive em um exercício 4, os alunos apresentaram diferentes formas de chegar em uma solução. Essa grande participação dos alunos foi algo surpreendente pois esperávamos que estariam mais envergonhados e resistentes por ser o primeiro dia e não se conhecerem uns aos outros.

Ao fim da aula utilizamos uma atividade demonstrativa para explorar na prática como utilizar razão e proporção, a partir de uma balança mostramos a quantidade de açúcar presente em diferentes produtos alimentícios com base nas informações fornecidas pelos rótulos. Os alunos se mostraram bem interessados e participaram ajudando a realizar cálculos para determinar os níveis de açúcar. Esse foi um momento de descontração que agregou muito para a aula, era visível a satisfação dos alunos com essa atividade que foi o momento final da aula.

6. Encontro 2

6.1. Plano de Aula 23/09/2023

Público - alvo: Alunos inscritos no PROMAT.

Conteúdos: Exponenciação, radiciação e conjuntos numéricos.

Professores: Fabrício Rustick/ Felipe Augusto/ Felipe Simão/ Milleni Ferreira

Objetivo Geral:

Compreender os conceitos acerca dos conteúdos de exponenciação, radiciação e conjuntos numéricos.

Objetivos Específicos:

Identificar e compreender as propriedades e definições referentes a operações envolvendo exponenciação;

Entender a radiciação como sendo a operação inversa da exponenciação e a partir disso compreender os conceitos acerca desse assunto;

Identificar e compreender os conjuntos numéricos (conjunto dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais) e seus possíveis elementos.

Tempo de execução: Uma aula do PROMAT (3h 40min)

Recursos didáticos: Material impresso, giz, caneta/lápis.

Metodologia de encaminhamento:

Os professores iniciarão a aula explicando o que é uma potenciação. Uma potenciação é quando temos um número sendo multiplicado por ele mesmo várias vezes. Exemplos de potenciações podem ser dados por:

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$$

O número de baixo (base da potência) é o número a ser multiplicado várias vezes por ele mesmo. O número pequeno acima dele (expoente) indica quantas vezes a base deve ser multiplicada por ela mesma. Sendo assim, a princípio, o expoente necessita ser um número positivo sem casas decimais. Chamamos de potência a união da base e do expoente.

Depois dessa explicação, os professores farão uma rápida comparação entre potências e multiplicações com o intuito de tornar nítida para os alunos a diferença entre as duas operações e evitar erros do tipo $3^2 = 3 \cdot 2 = 6$. Enquanto uma multiplicação é uma soma repetida várias vezes,

$$4 \cdot 3 = 4 + 4 + 4 = 12$$

uma potenciação é uma multiplicação repetida várias vezes.

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

Os professores podem fazer aqui perguntas do tipo “qual é o valor de $\left(\frac{6}{5}\right)^2$?” com o intuito de frisar a definição para os alunos: “não importa o que seja a base de uma potência, o valor da expressão é a base vezes a base quantas vezes o expoente determinar.”

Os docentes também precisam explicar aqui que a potenciação tem prioridade maior do que a multiplicação, divisão, adição e subtração em uma expressão numérica dando um exemplo concreto aos alunos, tal como:

$$\frac{5^2+2}{3}+5\cdot 2^3$$

“Para obter o valor dessa expressão numérica, o primeiro passo de todos é acharmos os valores das potências. Feito isso, procedemos da maneira usual”

$$\frac{25+2}{3}+5\cdot 8=\frac{27}{3}+40=9+40=49$$

Outra obrigação dos professores neste momento é fazer os alunos perceberem que, ao elevar um número negativo a uma potência par, o resultado será positivo. Entretanto, essa mudança de sinal não ocorre se o expoente for ímpar:

$$(-3)^2=(-3)\cdot(-3)=9$$

$$(-3)^3=(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)=-27$$

Dito isso, serão apresentadas aos alunos as propriedades das potenciações:

Propriedade 1: $a^b\cdot a^c=a^{b+c}$; após cada uma das propriedades, os professores devem anunciá-las em voz alta (“no produto de potências de mesma base, conservamos a base e somamos os expoentes”) e se certificar de que os alunos compreendem o que lhes foi dito por meio de um exemplo breve feito no quadro

$$3^2\cdot 3^3=3^{2+3}=3^5$$

Seguido de uma justificativa do porquê a propriedade é válida a partir do exemplo concreto, evitando o abstrato por enquanto.

$$3^2\cdot 3^3=(3\cdot 3)\cdot(3\cdot 3\cdot 3)=3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=3^{2+3}=3^5$$

Propriedade 2: $\frac{a^b}{a^c}=a^{b-c}$; “na divisão de potências de mesma base, conservamos a base e subtraímos os expoentes”. Um exemplo é:

$$\frac{2^5}{2^4}=2^{5-4}=2^1$$

Pois,

$$\frac{2^5}{2^4}=\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}=2^{5-4}=2^1$$

Propriedade 3: $(a^b)^c=a^{b\cdot c}$; “em uma potência de uma potência, conservamos a base e multiplicamos os expoentes”. Um exemplo é

$$(4^2)^3=4^{2\cdot 3}=4^6$$

Tendo em vista que

$$(4^2)^3=(4\cdot 4)^3=(4\cdot 4)\cdot(4\cdot 4)\cdot(4\cdot 4)=4^{2\cdot 3}=4^6$$

Propriedade 4: $(a\cdot b)^c=a^c\cdot b^c$; “em uma potência em que a base é um produto, aplicamos o expoente em cada um dos fatores da base e multiplicamos”. Por exemplo:

$$(4\cdot 5)^2=4^2\cdot 5^2$$

Já que

$$(4 \cdot 5)^2 = (4 \cdot 5) \cdot (4 \cdot 5) = 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 = 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 = 4^2 \cdot 5^2$$

Propriedade 5: $\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$; "em uma potência em que a base é uma divisão, aplicamos o expoente em cada um dos elementos da fração". Como exemplo:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2}$$

Visto que

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 3}{5 \cdot 5} = \frac{3^2}{5^2}$$

Depois de apresentar as propriedades, os professores irão propor uma pergunta aos alunos e analisá-la junto com eles: "é possível que o expoente seja um número negativo? E um número com casas decimais?". Até aqui, da maneira como definimos potenciação (uma base sendo multiplicada por ela mesma várias vezes), não faz nenhum sentido pensarmos em um expoente diferente de 1, 2, 3, ...

Os docentes devem explicar para os alunos que, a partir de agora, haverá uma ressignificação na ideia de potência, ou seja, não basearemos nosso raciocínio apenas na multiplicação repetida de uma base, mas utilizaremos também as propriedades que acabamos de discutir para definir o que seria uma potência de expoente negativo ou com casas decimais. Eles iniciarão essa discussão desenhando o seguinte esquema no quadro:

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5
2	4	8	16	32

"O padrão que notamos é: ao 'andarmos' uma potência para a direita, multiplicamos o valor anterior por 2. Sendo assim, podemos imaginar como seriam as potências negativas de 2 caso o padrão continuasse para a esquerda. Se 'andar para a direita' significa multiplicar por 2, 'andar para a esquerda' corresponde a dividir por 2 (operação inversa). Assim sendo, podemos extrapolar a definição de potenciação:

2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32

Note também que essa extrapolação também segue a propriedade 2 (vista da maneira contrária) que vimos antes, pois, por exemplo, 2^{-2} pode ser visto como:

$$2^{-2} = 2^{3-5} = \frac{2^3}{2^5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Portanto, daqui podemos tirar mais algumas propriedades que definem potenciação para expoentes negativos e o zero:"

Propriedade 6: $a^0 = 1$; "todo número não nulo elevado a zero é igual a 1". Por exemplo:

$$7^0 = 1$$

Tendo em vista que

$$7^0 = 7^{1-1} = \frac{7^1}{7^1} = 1$$

Após apresentar essa propriedade, é interessante os professores debaterem um pouco sobre o polêmico caso dessa propriedade: 0^0. Zero elevado a qualquer número não negativo é igual a zero, mas todo número elevado a zero é igual a um. Logo, 0^0 é igual a 0 ou 1? A verdade é que 0^0 uma indeterminação, ou seja, não existe nenhum número como sendo sua resposta, pois:

$$0^0 = 0^{1-1} = \frac{0^1}{0^1} = \frac{0}{0}$$

Propriedade 7: $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$; por exemplo:

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3}$$

Tendo em vista que

$$4^{-3} = 4^{1-4} = \frac{4^1}{4^4} = \frac{4}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{4^3}$$

Depois das propriedades serem passadas pediremos para os alunos se eles conseguiram entender até aqui e se resolveram todos os exercícios da folha. Logo em seguida começaríamos a falar sobre a raiz quadrada começamos falando que: “A raiz quadrada de um número é determinada por um número real elevado ao quadrado” e explicaremos que para encontrar números muito grandes é preciso utilizar o processo de fatoração por meio de decomposição e número primos, para que eles possam entender melhor passaremos o exemplo:

Exemplo:

2704	2
1352	2
676	2
338	2
169	13
13	13
1	

$\sqrt{2^2 . 2^2 . 13^2} = 52$

Sendo assim 52 é a raiz quadrada $\sqrt{2704}$

Explicaremos que depois da fatoração reunimos os números primos em potência de 2, falaremos também sobre os dois tipos de raiz quadrada que podemos encontrar na decomposição.

Raiz exata: A raiz será exata quando o seu resultado fizer parte do conjunto dos números racionais

(números inteiros, decimais exatos e dizimas periódicas);

Exemplo: $\sqrt{16} = 4$ $\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{75{,}69} = 8{,}7$

Raiz não exata: A raiz não exata se dá quando o seu resultado faz parte do conjunto dos números irracionais (números decimais, infinitos e não periódicos);

Exemplo: $\sqrt{3} = 1{,}732\ 050\ 8$ $\sqrt{5} = 2{,}236\ 067\ 9$ $\sqrt{6} = 2{,}449\ 489\ 7$

Perguntaremos para a turma se eles conhecem os conjuntos numéricos que nós citamos nas raízes exatas e não exatas, explicaremos sobre os conjuntos que fazem parte do conjunto numérico.

Conjunto naturais (N): Contém os números que utilizamos para contar (Incluindo o 0) até o infinito, seus subconjuntos são não nulos, pares, ímpares e primos.

N: $\{$**0,1,2,3,4, 5, ...**$\}$

Pediremos para os alunos encontrarem a caixa dos conjuntos naturais, em

Números inteiros (Z): Contém todos os elementos dos conjuntos naturais e os seus opostos, podemos dizer que os números naturais é um subconjunto dos números inteiros.

Seus subconjuntos são: Números inteiros negativos, inteiros não positivos, inteiros positivos e sem o zero, inteiros não nulo, inteiros não nulo negativos.

Z: $\{\mathbf{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4}\}$

Números Racionais (Q): Contém todos os números que podem ser escritos como $\frac{a}{b}$,

Todo um número inteiro também é um número racional.

$\boldsymbol{Q}\colon\{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,2,\frac{2}{3}\ldots\}$

Números irracionais (I): Contém os números decimais não exatos com representação infinita e não periódicas

(I)=π

Números Reais: Engloba os elementos dos **conjuntos dos números racionais e irracionais, lembrando que um número real**, **quando é racional não pode ser irracional** ao mesmo tempo**.**

Ao voltar do intervalo, iremos pedir para que os alunos se dividem em duas equipes, sendo que a quantidade de pessoas contida nas equipes precisa ser igual, entregaremos uma caixa para cada equipe que representara os conjuntos numéricos, pediremos para as equipes encontrar os números que será pedido a cada rodada dentro das caixas, (30min).

Após este jogo pediremos para a turma sentar-se em seus lugares e entregaremos uma cartela de bingo para cada aluno (60 min).

Nessa atividade serão explorados os conceitos trabalhados na aula. Ao invés de ser sorteado diretamente números como é usual nesse jogo, serão sorteadas expressões envolvendo exponenciação e radiciação e definições acerca de conjuntos numéricos, essas corresponderam as "casas" que estão nas cartelas do jogo. Vence quem completar uma linha, coluna ou quatro cantos primeiro.

No final do bingo, entregaremos uma lista de atividades para que os alunos possam resolver em casa.

6.2. Material Entregue

<u>Potenciação</u>

Potenciação: é quando temos um número sendo multiplicado por ele mesmo várias vezes. Exemplos:

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = \boxed{}$

$3^2 = 3 \times 3 = \boxed{}$

Elementos da potência:

$$a^b \quad \begin{matrix} \rightarrow \boxed{} \\ \rightarrow \boxed{} \end{matrix}$$

Chamamos de potência a união da base e do expoente.

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 =$$

$$2^4 =$$

Qual é o valor de $(\frac{6}{5})^2$?

Não importa o que seja a base de uma potência, o valor da expressão é a base vezes a base quantas vezes o expoente determinar.

A potenciação tem prioridade maior do que a multiplicação, divisão, adição e subtração em uma expressão numérica. Considerando isso, resolva as seguintes expressões:

$\frac{5^2+2}{3} + 5 \cdot 2^3 =$

$\frac{3 \cdot 2^3}{4+2^2} =$

Ao elevar um número negativo a um expoente par, o resultado será um número _______________, porém ao elevar um número negativo a um expoente ímpar o resultado será ________________.

$(-3)^2 =$ $\qquad\qquad$ $(-3)^3 =$

Propriedades da potenciação:

Propriedade 1: $a^b + a^c = a^{b+c}$: no produto de potências de mesma base, conservamos a _____________ e somamos os _________________. Ex:

$$3^{\boxed{\;+\;}} \qquad 3^{\boxed{}}$$

$$3^2 \cdot 3^3 = \qquad\qquad =$$

$$2^5 \cdot 2^3 =$$

Propriedade 2: $\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}$: na divisão de potências de mesma base, conservamos a ______________ e subtrairmos os ________________. Ex:

$$\frac{2^5}{2^4} = 2^{\boxed{\,-\,}} = 2^{\square}$$

$$\frac{6^{10}}{6^8} =$$

Propriedade 3: $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$: em uma potência de uma potência, conservamos a base e ____________________ os expoentes. Ex:

$$(4^2)^3 = 4^{\boxed{\,\cdot\,}} = 4^{\square}$$

$$(2^2)^5 =$$

Propriedade 4: $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$: em uma potência em que a base é um produto, aplicamos o expoente em cada um dos fatores da base e ____________________. Ex:

$$(4 \cdot 5)^2 = 4^{\square} \cdot 5^{\square}$$

$$(2 \cdot \ 3)^3 =$$

Propriedade 5: $(\frac{a}{b})^c = \frac{a^c}{b^c}$: em uma potência em que a base é uma divisão, aplicamos o expoente em cada um dos elementos da _______________. Ex:

$$(\frac{3}{5})^2 = \frac{3}{5^{\square}}$$

$$(\frac{10}{9})^2 =$$

Potências com expoentes negativos

Para entendermos o que significa elevar um número a um expoente negativo, vamos primeiro analisar os valores para potências de 2:

2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4

				2	4	8	16

Pensando na Propriedade 2, podemos entender a potência 2^{-2} da seguinte forma:

$$2^{-2} = 2^{3-5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

A partir disso podemos tirar mais algumas propriedades para expoentes negativos e o zero:

Propriedade 6: $a^0 = 1$: todo número não nulo elevado a ________ é igual a _____.

$$7^0 = 1$$

$$(\frac{198}{98{,}6})^0 =$$

Propriedade 7: $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$: elevar um número a um expoente negativo é o mesmo que calcular o inverso desse número considerando que o expoente fosse positivo.

$$4^{-3} = \frac{1}{4^3}$$

$$(-2)^{-4} =$$

Radiciação

A operação de radiciação é o inverso da de exponenciação. Portanto para encontrar a raiz de um número n devemos pensar: "qual número multiplicado por ele mesmo resulta em n".

$$\sqrt{m} = n, \text{ tal que } n \cdot n = m$$

Ex: $\sqrt{9} = 3$, pois $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

$$\sqrt{25} =$$

$$\sqrt{\frac{64}{81}} =$$

Para encontrar a raiz quadrada de números muito grandes é preciso utilizar o processo de fatoração por meio de decomposição em números primos.

Exemplo:

2704	2
1352	2
676	2
338	2
169	13
13	13
1	

$$\sqrt{2^2 . 2^2 . 13^2} = 52$$

Sendo assim 52 é a raiz quadrada $\sqrt{2704}$

Agora, calcule $\sqrt{1764}$.

Raiz exata: A raiz será exata quando o seu resultado fazer parte do conjunto dos números racionais

(números inteiros, decimais exatos e dizimas periódicas);

Ex: $\sqrt{16} = 4$ $\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{75{,}69} = 8{,}7$

Raiz não exata: A raiz não exata se dá quando o seu resultado faz parte do conjunto dos números irracionais (números decimais, infinitos e não periódicos);

Ex: $\sqrt{3} = 1{,}732\,050\,8$ $\sqrt{5} = 2{,}236\,067\,9$ $\sqrt{6} = 2{,}449\,489\,7$

Conjuntos Numéricos

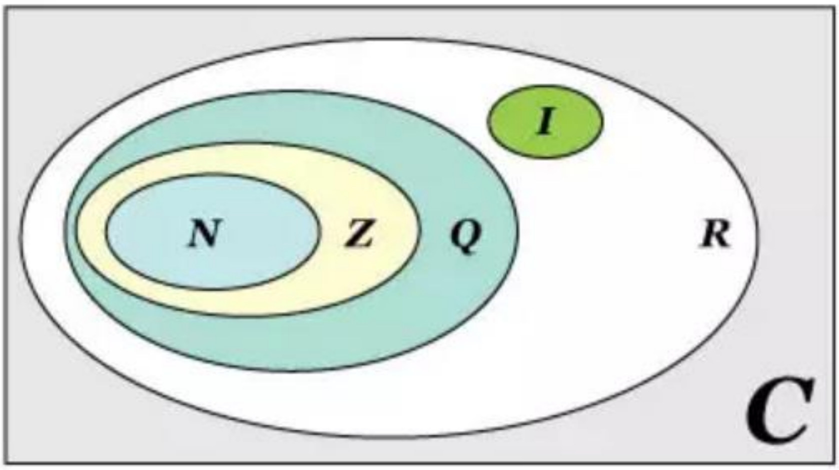
Conjunto dos números naturais (N) : Contém todos os números inteiros positivos, incluindo o 0: (0,1,2,3,4,5,...∞);

Conjunto dos números inteiros (Z): Contém todos os elementos do conjunto dos números naturais e também seus opostos: $(-\infty, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, \infty)$;

Conjunto dos números racionais (Q): Reúne todos os números que podem ser escritos na forma fracionária, portanto engloba todos os números inteiros e também números decimais expressos por dízimas periódicas. Ex: $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}$, - $\frac{3}{7}$, …

Conjuntos dos números irracionais (I): Reúne os números decimais não exatos com uma representação infinita e não periódica. Ex: $\sqrt{2}\ \ 1{,}414213\ldots, \pi = 3{,}141592\ldots$

Conjunto dos números reais (R): Engloba todos os elementos dos conjuntos acima citados, ou seja, é a União do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais.



6.3. Lista de Exercícios:

1- Complete:

a) $\sqrt{100} = \boxed{}$ porque $\boxed{}^{2} = 100$ e $\boxed{}$ é um número positivo.

b) $\sqrt{\frac{4}{25}} = \boxed{}$ porque $\left(\boxed{}\right)^{2} = \frac{4}{25}$ e $\boxed{}$ é um número positivo.

2- Responda:

a) Encontre, por tentativas, dois números diferentes que elevados ao quadrado resultem em 169. -13 e +13

b) Qual é a raiz quadrada de 169? 13, pois $13^2 = 169$. Vale ressaltar que -13 não é uma resposta para essa pergunta.

3- Efetue as operações:

a) 3^3 = 27

b) 20^0 = 1

c) $\sqrt{25}$ = 5

d) $\left(\frac{10}{2}\right)^2$ = 25

e) $\sqrt{\frac{64}{49}}$ = 8/7

f) $(-2)^{-5}$ = $\frac{-1}{32}$

4- Uma região no formato de um quadrado possui área igual a 729m². Diante disso, qual é a medida do lado dessa região, em metros?

a) 19

b) 21

c) 23

Decompondo o número 729, obtemos que

$729 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3) = 27 \cdot 27$

Sendo assim, $\sqrt{729} = 27$

d)25

e)27

5- (Enem - 2012) A Agência Espacial Norte Americana (NASA) informou que o asteroide YU 55 cruzou o espaço entre a Terra e a Lua no mês de novembro de 2011. A ilustração a seguir sugere que o asteroide percorreu sua trajetória no mesmo plano que contém a órbita descrita pela Lua em torno da Terra. Na figura, está indicada a proximidade do asteroide em relação à Terra, ou seja, a menor distância que ele passou da superfície terrestre.

Com base nessas informações, a menor distância que o asteroide YU 55 passou da superfície da Terra é igual a:

a) 3,25. 10^2 km 3,25 x 100000 = 325mil, a menor distância.

b) 3,25. 10^3 km

c) 3,25. 10^4 km

d) 3,25. 10^5 km

e) 3,25. 10^6 km

6- (ENEM 2015) As exportações de soja do Brasil totalizaram 4,129 milhões de toneladas no mês de julho de 2012, e registraram um aumento em relação ao mês de julho de 2011, embora tenha havido uma baixa em relação ao mês de maio de 2012. A quantidade, em quilogramas de soja exportada pelo Brasil no mês de julho de 2012 foi de:

a) $4{,}129 \times 10^3$ Milhões é representado por 10^6. Assim, passando 4,129 milhões de

b) $4{,}129 \times 10^6$ toneladas para kg, temos $4{,}129 \cdot 10^9$.

c) $4{,}129 \times 10^9$

d) $4{,}129 \times 10^{12}$

e) $4{,}129 \times 10^{15}$

7- Qual proposição abaixo é verdadeira?

a) Todo número inteiro é racional e todo número real é um número inteiro. F

b) A intersecção do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais tem 1 elemento. F

c) O número 1,83333… é um número racional. V

d) A divisão de dois números inteiros é sempre um número inteiro. F

8- Sobre os conjuntos numéricos, julgue as afirmativas a seguir.

I – A diferença entre o conjunto dos números reais e o conjunto dos números racionais é igual ao conjunto dos números irracionais. V

II – $\pi = 3{,}141592653\ldots$ é um número racional; F

III – O resultado de | -7,5 | é um número natural. F

Marque a alternativa correta.

A) Somente a afirmativa I é verdadeira.

B) Somente a afirmativa II é verdadeira.

C) Somente a afirmativa III é verdadeira.

D) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.

E) Todas as afirmativas são verdadeiras.

9- Julgue se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

(F) -5 é um número natural;

(V) $\sqrt{100}$ é um número inteiro;

(V) $\frac{1}{3}$ é um número racional;

(F) $\sqrt{2}$ não é um número irracional;

(V) 13 é um número racional;

(F) o conjunto dos números inteiros está contido no conjunto dos números irracionais;

(V) o conjunto dos números irracionais está contido no conjunto dos números reais;

(V) os números $2, \frac{1}{2}$ e -2 estão contidos no conjunto dos números reais.

10- (ENEM/2004) Um fabricante de cosméticos decide produzir três diferentes catálogos de seus produtos, visando a públicos distintos. Como alguns produtos estarão presentes em mais de um catálogo e ocupam uma página inteira, ele resolve fazer uma contagem para diminuir os gastos com originais de impressão. Os catálogos C_1, C_2 e C_3 terão, respectivamente, 50, 45 e 40 páginas. Comparando os projetos de cada catálogo, ele verifica que C_1 e C_2 terão 10 páginas em comum; C_1 e C_3 terão 6 páginas em comum; C_2 e C_3 terão 5 páginas em comum, das quais 4 também estarão em C_1.

Efetuando os cálculos correspondentes, o fabricante concluiu que, para a montagem dos três catálogos, necessitará de um total de originais de impressão igual a:

a)135; b) 126; c)118; d)114;

Vamos responder a essa questão utilizando um diagrama de Venn com 3 grupos, cada um representando um dos catálogos. Iniciamos a preencher o diagrama pela interseção dos 3 grupos, pois sabemos que há 4 páginas em comum entre todos os catálogos. Com isso, sabemos que há 1 página em C_2 e C_3 que não está em C_1, 6 páginas em C_1 e C_2 que não estão em C_3 e 2 páginas em C_1 e C_3 que não estão em C_2. Com essas informações, podemos descobrir que há 38 páginas presentes apenas em C_1, 34 páginas presentes apenas em C_2 e 33 páginas presentes apenas em C_3. Somando todos os originais que obtemos, temos: $38 + 34 + 33 + 1 + 6 + 2 + 4 = 118$

6.4. Referências:

QCONCURSOS. Disponível em: https://www.qconcursos.com/questoes-do-enem/disciplinas/matematica-matematica/potencia/questoes?page=2 Acesso em:19 set. 2023.

MATERIAISPDG. Disponível em:https://www.materiaispdg.com.br/2023/07/gerador-de-bingo-de-palavras.html? Acesso em:19 set. 2023.

TODAMATERIA: Disponível em: https://www.todamateria.com.br/exercicios-de-potenciacao/. Acesso em:19 set. 2023,

6.5. Relatório Aula 2

Os professores iniciaram a aula diretamente com a abordagem do conteúdo programado que estava no plano de aula. Comparando a quantidade de estudantes presentes, na aula do dia 23 compareceram menos alunos do que no sábado anterior. Foi possível notar nessa aula alguns fatores, tais como a atenção maior que os alunos estavam prestando nas explicações e a participação, em alguns momentos, dos alunos na explicação, os quais faziam perguntas pertinentes ou complementavam as explicações. Foi possível notar que o método de explicar expoentes negativos por meio da construção de uma tabela auxiliar foi bom, pois os alunos conseguiram, após certo raciocínio, entender essa ideia. Uma parte do conteúdo programado para o primeiro horário ficou para o segundo horário, sendo ele raízes não exatas e conjuntos numéricos.

Já no segundo horário, assim como determinado no plano de aula, foi feita a atividade envolvendo as caixas dos conjuntos numéricos. Um ponto positivo que notamos, foi que para manusear as caixas os alunos se levantaram das suas mesas e interagiram uns com os outros, conversando sobre como entender a relação de pertencimento a um conjunto. Essa atividade, embora tenha sido de curta duração, foi bem-sucedida. Quando começamos os preparativos para o bingo, foi possível notar uma animação entre os alunos, alguns até brincaram que o prêmio de fechar uma cartela seria um iphone ou algo do tipo. Foi possível notar durante a atividade que eles gostaram da ideia e conversaram bastante entre si sobre as perguntas e respostas, aumentando sua interação. O bingo exigiu bastante tempo da aula, mas, durante sua realização, os alunos estavam se divertindo bastante em conjunto. No final, conseguimos mostrar todas as perguntas do bingo, acabando junto com o horário e solicitando aos alunos que resolvessem a lista de exercícios em casa.

7. Encontro 3

7.1. Plano de aula 30/09/2023

Público-alvo: Alunos do Promat

Conteúdos: Equações

Professores: Felipe Klumb, Felipe Simão, Fabricio Rustick, Milleni Ferreira

Objetivo Geral:

Compreender como se resolve uma equação de primeiro e segundo grau

Solucionar problemas de equações do 1º e 2º grau

Objetivo Específico:

Interpretar os enunciados dos exercícios propostos

Tempo de execução: Uma aula do Promat (3h 40 min)

Recursos didáticos: Quadro, giz, folha sulfite, lápis de cor, dados comuns, piões.

Metodologia de encaminhamento:

A sala estará organizada em duplas, começaremos a aula tirando algumas dúvidas sobre a lista da aula passada e relembraremos o que foi passado (20 min), entregaremos para a turma a lista de atividades algumas atividades será resolvido durante a aula e as outras ficaram como tarefa de casa e uma apostila para eles acompanhar a aula, será falado para a turma a definição de 1º grau, passaremos no quadro a fórmula da equação e falaremos sobre a sua definição.

Definição: $ax + b = 0.$ $\quad$ $\boldsymbol{com\ a} \in \mathbb{R}* \ \boldsymbol{e\ b} \in \mathbb{R}$

- Equação de 1º é igualdade entre as expressões que a transforma em uma identidade numérica, para um ou mais valores atribuídos em suas variáveis;
- O valor que será encontrado é chamado de incógnita, é representado por x, y e z.

Passaremos dois exemplos no quadro para mostrar e explicar os passos para resolver uma equação de primeiro grau aos alunos e logo em seguida iremos escolher um dos exercícios da lista para que os alunos resolvam e compreendam melhor a definição.

Exemplos:

$2x+1=13$

$(3x+5).2=4$

Explicaremos que para resolver uma equação é necessário isolar a incógnita do resto da equação, para isso devem ser realizadas operações matemáticas a fim de manter apenas a incógnita em um dos lados da igualdade o que restar do outro lado é a solução. Pediremos para que os alunos resolvam o exercício posposto na lista de atividade no começo da aula.

Exercícios: (10 min)

(FAETEC-2015) Um pacote do biscoito Saboroso custa R$:1,25. Se João comprou N pacotes desse biscoito gastando R$:13,75, o valor de N é igual a:

A)11

B)12

C)13

D)14

E)15

R:

$$1{,}25n = 13{,}75$$

$$n = 13{,}75/1{,}25$$

$$n = 11$$

(CEFET/RJ-2ª fase- 2016) Carlos e Manoela são irmãos gêmeos. A metade da idade de Carlos mais um terço da idade de Manoela é igual a 10 anos. Qual é a soma das idades dos irmãos?

R: Como são irmão gêmeos, os dois tem a mesma idade, então podemos chamar a idade de cada um de x:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 10$$

$$\frac{5}{6}x = 10$$

$$x = 10 \cdot \frac{6}{5}$$

$$x = 12$$

Então cada um dos dois irmãos tem 12 anos, como queremos saber a soma das idades temos:

$$y = 12 + 12$$

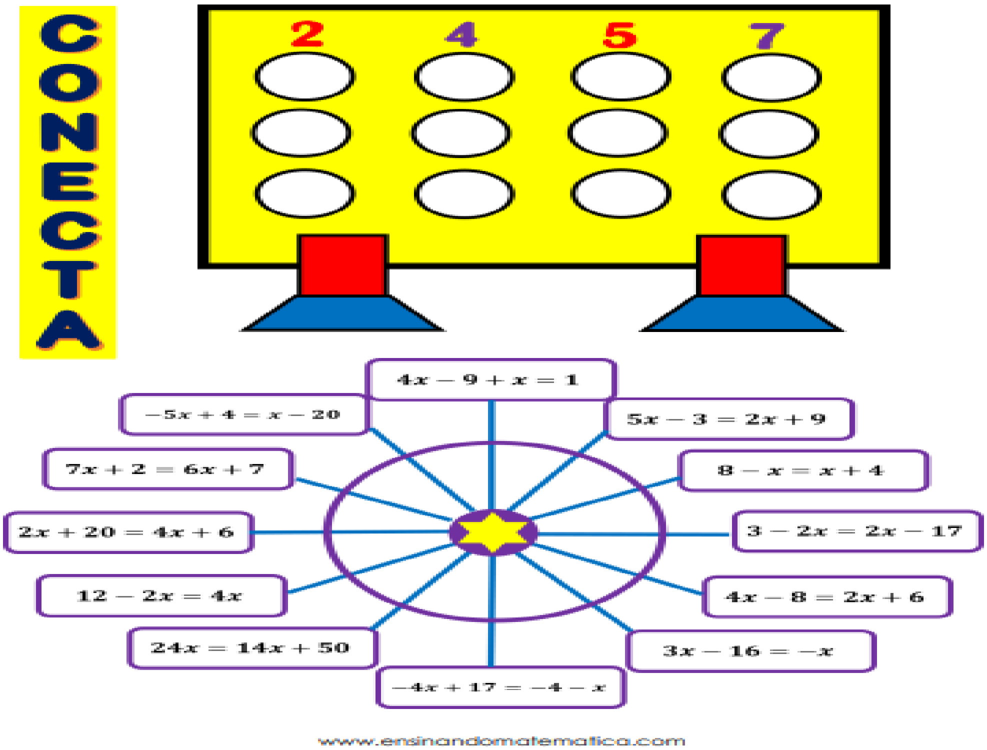
$$y = 24$$

Enquanto eles resolvem as questões passaremos nas duplas tirando dúvidas em seguida pediremos se alguém quer compartilhar como resolveu no quadro, caso ninguém queira iremos nós mesmos resolver, tirando as dúvidas dos alunos caso ainda terem alguma. Logo após a atividade, entregaremos para as duplas um jogo sobre equações de 1ºgrau.

Regras do jogo:

- Cada dupla receberá um material. Será decidido quem começa o jogo no par ou impar.
- O primeiro a jogar deve colocar seu peão em umas das casas que contém uma equação, em seguida jogará o dado e andará com o peão, em sentido horário, quantas quadrinhas foi sorteada no dado. Resolverá a equação indicada pelo peão e com o seu lápis de cor irá pintar o último círculo da coluna que tiver a sua resposta e deverá pintar a quadrinha da equação sorteada.
- As equações do jogo têm como resposta 2,4,5 ou 7 se um desses resultados não for encontrado o jogador deverá refazer a conta.
- O jogador adversário, lançará o dado e deve começar a se movimentar a partir da quadrinha em que foi deixado pelo colega.
- Cada jogador pintará o primeiro círculo de baixo para cima que encontrar na coluna da sua resposta.
- Se o peão para em uma equação já resolvida ele deverá ser movido para a próxima equação (no sentido horário) que ainda não foi resolvida.
- O jogo termina quando um dos jogadores conseguir formar uma linha, coluna ou diagonal com três círculos pintados com a sua cor escolhida e esse jogador será o vencedor.

Figura 11: Jogo conecta



Fonte 3:https://www.ensinandomatematica.com/equacoes-de-1-grau-jogos-para-facilitar-a-aprendizagem. Acesso em 07 dez. 2023.

Ainda antes do intervalo iremos escolher algumas equações do jogo e pediremos para que um dos alunos resolvam no quadro e expliquem o método que utilizaram.

Após o intervalo falaremos sobre a equações do 2º grau, passaremos a sua fórmula no quadro e falaremos sobre ela.

Definição: $ax^2 + bx + c = 0$

- Equação de 2ºgrau é uma equação polinomial, onde seu termo de maior grau é elevado ao quadrado, também é conhecida como equação quadrática;
- A, B, C são chamados de coeficientes da equação e X é chamado de incógnita, os coeficientes faz parte dos conjuntos dos números reais e A é diferente de 0
- **Raízes da equação:** Ao resolver a equação de 2º grau determinamos o valor de x, esses valores que são encontrados são chamados de raízes da equação

Ao definir o que é uma equação de 2ºgrau relembraremos ele sobre a fórmula resolutiva de equações de 2º grau.

Fórmula de resolutiva de equações de 2º grau:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

Na fórmula precisamos encontrar o valo de Δ $(Delta)$ e por isso iremos utilizar a fórmula abaixo, pois conforme o valor de Delta é possível saber quantas raízes a equação terá, para encontrarmos o Delta é necessário está fórmula:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

Em seguida apresentaremos o método de Soma e Produto para resolução de equações do segundo grau:

Pela soma e produto, dada a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, temos que:

$x1+x2= -b/a$

$x1 \cdot x2= c/a$

x1 e x2 são as soluções da equação de 2º grau.

a, b e c são os coeficientes da equação de 2º grau.

Passaremos um exercício no quadro para mostrar ao aluno o desenvolvimento da conta e em seguida iremos escolher duas atividades da lista que foi entregue no início da aula para os alunos resolverem e tirarem suas dúvidas.

Exercícios:

$x2-2x-15=0$

$2x^2+7x+5=0$

Atividades:

O triplo do quadrado do número de filhos de Pedro é igual a 63 menos 12 vezes o número de filhos. Quantos filhos Pedro tem?

$$3x\hat{}2=63-12x$$

$$3x^2+12x-63=0$$

$$a= 3$$

$$b= 12$$

$$c= -63$$

$$x=-12\pm122-4\cdot3\cdot(-63)2\cdot3$$

$$x=-12\pm9006$$

$$x=-12\pm306$$

$$x'=-12+306=186=3$$

$$x''=-12-306=-426=-7$$

Como a resposta tem que ser um número positivo, o número de filhos é 3.

Comprei 4 lanches a um certo valor unitário. De outro tipo de lanche, com o mesmo preço unitário, a quantidade comprada foi igual ao valor unitário de cada lanche. Paguei com duas notas de cem reais e recebi R$ 8,00 de troco. Qual o preço unitário de cada produto?

Preço do lanche = x

$$4x+x\cdot x+8=200$$

$$x^2+4x-192=0$$

$$a= 1$$

$$b= 4$$

$$c= -192$$

$$x=-4\pm 4^2-4\cdot 1\cdot(-192)2\cdot 1$$

$$x=-4\pm 7842$$

$$x=-4\pm 282$$

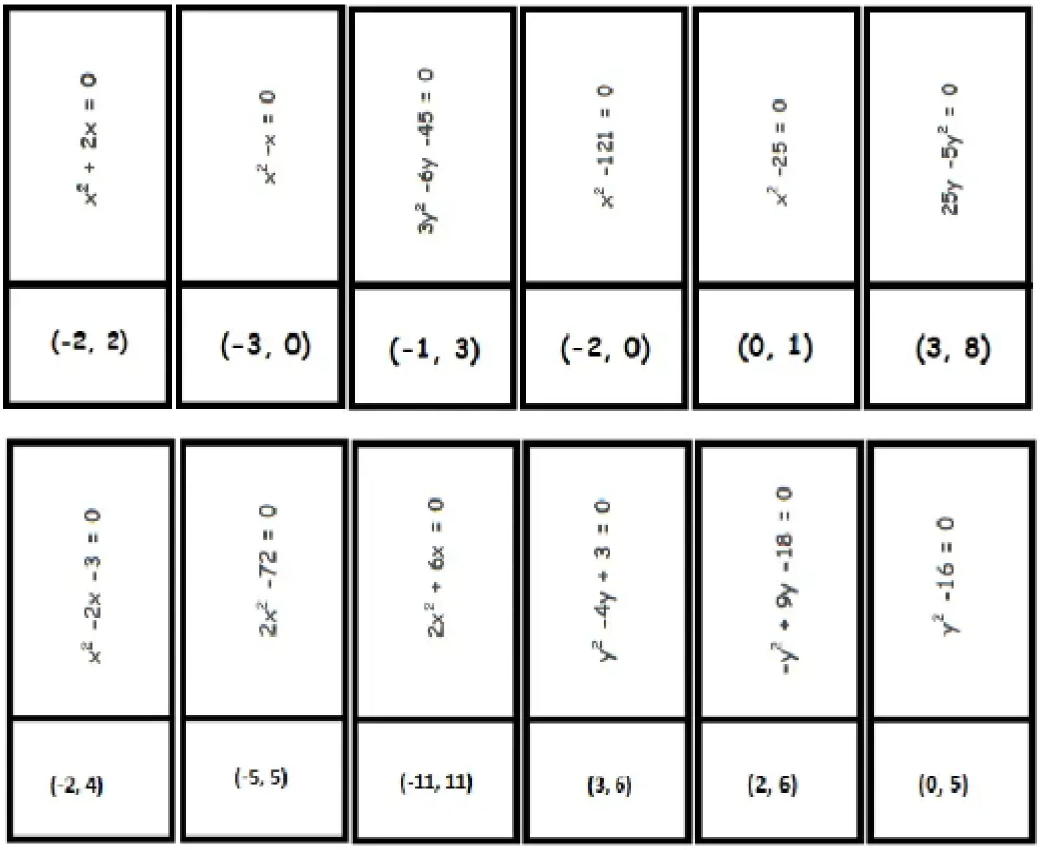
$$x'=-4+282=242=12$$

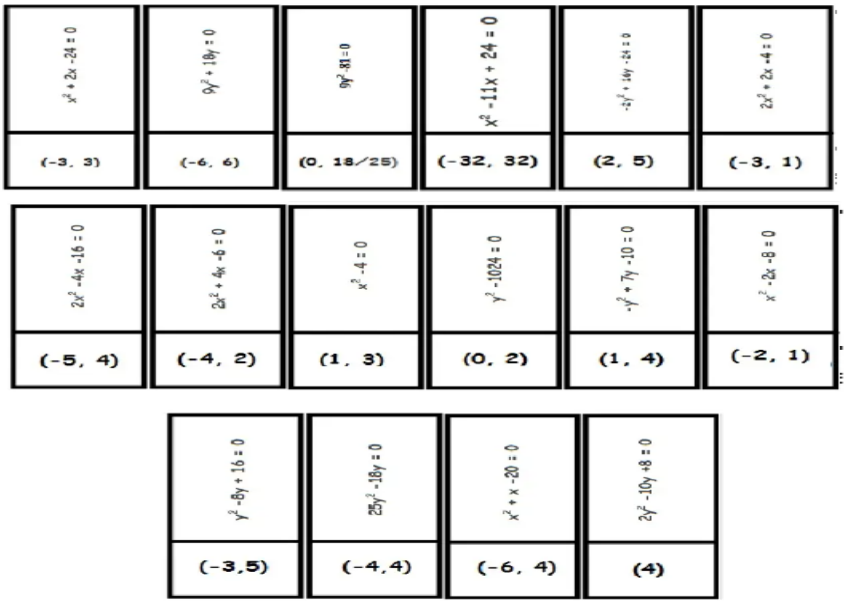
$$x''=-4-282=-322=-16$$

Como a resposta tem que ser um número positivo, cada lanche custou 12 reais.

Logo a pós os alunos resolverem as atividades pediremos se alguém quer resolver no quadro, caso isso não aconteça iremos resolver as atividades mostrando passo a passo de como resolver, em seguida pediremos para que eles formem um grupo de 4 pessoas com a outra dupla e entregaremos o dominó.

Figura 12: Dominó das equações de 2° grau





Fonte: Disponível em: https://pt.scribd.com/doc/225696019/Equacao-Do-2%C2%BA-Grau-Domino. Acesso em: 14 set. 2023.

Regras do jogo:

- Para saber quem irá iniciar o jogo será jogado par ou ímpar
- Cada jogador terá 7 cartas, o jogador que for começar o jogo escolhe uma de suas cartas
- Se o jogador seguinte possuir as raízes da equação joga a próxima peça, caso ao contrário contra no monte e passa a vez
- Ganha o jogo quem "baixar" todas suas cartas primeiro.

Avaliação:

A avaliação será feita observando o desenvolvimento dos conceitos matemáticos durante a realização dos jogos na aula.

7.2. Material Entregue

APOSTILA: Relembrando: EQUAÇÕES

Equação do 1º grau: Uma equação é uma igualdade matemática com elementos conhecidos (coeficientes) e desconhecidos (incógnitas).

O grau de uma equação é o maior expoente da incógnita, assim uma equação em que o maior expoente da incógnita é 1 é conhecida como equação do 1º grau.

O formato geral de uma equação de 1º grau é: $\boldsymbol{ax + b = 0}$

Para encontrar a solução de uma equação do 1º grau com uma incógnita, precisamos isolar essa incógnita. Para isso devemos realizar operações nos dois lados da equação, de modo a manter apenas a incógnita de um dos lados da igualdade.

Exemplo: Resolver a equação:

$$3x+5=x+21$$
$$3x+5-5=x+21-5$$
$$3x=x+16$$
$$3x-x=x+16-x$$
$$2x=16$$
$$\frac{2x}{2}=16/2$$
$$x=8$$

Equação do segundo grau: Uma equação de segundo grau é uma equação cujo termo de maior grau está elevado ao quadrado. Também chamada de equação quadrática, é representada por: $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$. A incógnita x representa um valor desconhecido, já as letras a, b e c são chamadas de coeficientes da equação. Ao resolver uma equação de segundo grau, encontramos duas possíveis soluções, as quais são chamadas de raízes da equação.

Existem várias formas de solucionar uma equação de segundo grau, as mais conhecidas são através da fórmula resolutiva de equações do segundo grau e através do método de soma e produto.

Fórmula resolutiva de equações do 2º grau: $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$;para resolver essa equação primeiro precisamos encontrar o valor de Δ que é dado pela expressão: $\Delta=b^2-4ac$ após isso basta substituir o valor encontrado e os valores dos coeficientes na expressão inicial para obter as raízes da equação.

Soma e Produto: $x_1+x_2=-b/a$

$x_1\cdot x_2=c/a$

Nesse método, devem ser encontrados quais são os dois números que ao serem adicionados resultem em $-b/a$ e simultaneamente ao serem multiplicados resultem em c/a. Esses dois números são as raízes da equação.

Exemplo: Resolver a equação $-3x^2+18x-15=0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a},\ \Delta=b^2-4.a.c$$

$$\Delta=6^2-4.(-1).(-5)$$
$$\Delta=36-20$$
$$\Delta=16$$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{16}}{2.(-1)}$$

$$x=\frac{-6\pm4}{-2}$$

$$x'=\frac{-6+4}{-2}=\frac{-2}{-2}=1$$

$$x''=\frac{-6-4}{-2}=\frac{-10}{-2}=5$$

O conjunto solução é **S = {1; 5}**.

Pelo método de soma e produto precisamos encontrar quais valores que somados resultem em *-18/-3 = 6* e que quando multiplicados resultem em *-15/-3 = 5.*

$$x_1+x_2=6$$
$$x_1\cdot x_2=5$$
$$x_1=1$$

7.3. Lista de Exercícios

1) Resolva as equações:

3x+2=23
R:
3x=21
X=21/3
X=7

−4y+8=2−3y
R:
6=y

2) Escreva uma equação que represente a situação a seguir. Depois, calcule a quantia que Otavio tem.
O triplo da quantia que Otávio tem mais R$12,00 é igual a R$264,00.

3x+12=264
3x=264−12
3x=252
x=252/3
x=84

3) O dobro de um número subtraído de 20 é igual a 100. Qual é o número?

2x−20=100
2x=120
x=60

4) Carlos tinha certa quantia, foi ao shopping e gastou 1/3 da quantia na compra de uma revista, gastou 1/4 da quantia na compra de um CD e ainda ficou com R$ 25,00. Qual era a quantia que Carlos possuía?
R:

13x+14x+25=x
712x+25=x
25=x−712x
25=512x
25·125=x
x=60

5) Um pacote de biscoito Saboroso custa R$1,25. Se João comprou N pacotes desse biscoito gastando R$13,75, quantos pacotes de biscoito ele comprou?
a)11
b)12
c)13
d)14
e) 15
R:

1,25n=13,75

n=13,75/1,25

n=11

6) Carlos e Manoela são irmão gêmeos. A metade da idade de Carlos mais um terço da idade de Manoela é igual a 10 anos. Qual é a soma das idades dos dois irmãos?
a) 10

b) 12
c) 18
d) 20
e) 24
R:
Como são irmão gêmeos, os dois tem a mesma idade, então podemos chamar a idade de cada um de x:

12x+13x=10

56x=10

x=10·65

x=12

Então cada um dos dois irmãos tem 12 anos, como queremos saber a soma das idades temos:

y=12+12

y=24

7) (Uece) Uma peça de tecido, após a lavagem, perdeu 1/10 de seu comprimento e este ficou medindo 36 metros. Nestas condições, o comprimento, em m, da peça antes da lavagem era igual a:
a) 44
b) 42
c) 40
d) 38

R:

x−110x=36
910x=36
x=36·109
x=40

8) Um professor gasta *1/3* do seu salário com alimentação, *1/2* com moradia e ainda lhe sobram R$1.200,00. Qual é o salário desse professor?
a) R$2.200,00
b) R$7.200,00
c) R$7.000,00
d) R$6.200,00
e) R$5.400,00

13x+12x+1200=x
56x+1200=x
1200=x−56x
1200=16x
1200·6=x
7200=x

9) (IFRS - 2017) Pedro tinha x reais das suas economias. Gastou um terço no parque de diversões com os amigos. No outro dia, gastou 10 reais com figurinhas para seu álbum de jogadores de futebol. Depois saiu para lanchar com seus colegas na escola gastando mais 4/5 do que ainda tinha e ficou ainda com um troco de 12 reais. Qual o valor de x em reais?

a) 75
b) 80
c) 90
d) 100
e) 105

R:

$$13x+10+45x-13x-10+12=x$$

$$13x+10+45x-415x-8+12=x$$

$$1315x+14=x$$

$$14=x-1315x$$

$$14=215x$$

$$14\cdot 152=x$$

$$105=x$$

10) (ENEM 2009) Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia contribuído pagaria a sua parte e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$7,00.
De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?
a) R$14,00
b) R$17,00
c) R$22,00
d) R$32,00
e) R$57,00

$$5x+50\cdot 7=510$$
$$5x+350=510$$
$$5x=160$$
$$x=160/5$$
$$x=32$$

11- Faça a expansão dos produtos indicados como no exemplo abaixo.
$(x + 2)(x + 3)$
$=x^2 + 3x + 2x + 2 \cdot 3$
$=x^2 + 5x + 6.$
A) $x(x + 7)$.
R: x^2+7x

B) $(x + 2)(x + 5)$.
R: $x^2+7x+10$

c) $(x - 2)(x + 3)$.
R: x^2+x-6

12- Identifique os coeficientes a, b e c para as seguintes equações:
a) $x^2+3x-5=0$

a=1; b=3; c=−5.

b) $5x^2+9=x^2+3x$
a=4; b=−3; c=9.

C)(x−3) (2+x) =0
a=1; b=−1; c=−6.

13- Encontre as raízes da que formam o conjunto solução da equação do segundo grau $2x^2-7x=0$.

$$x = \frac{-(3) \pm \sqrt{(3)^2 - 4 \times (1) \times (-4)}}{2 \times (1)} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - (-16)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-3+5}{2} \vee x = \frac{-3-5}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{2}{2} \vee x = -\frac{8}{2}$$

$$S = \{1, -4\}$$

14- Resolver a equação $x^2+3x-4=0$.
$(x-1)(x+4) = x^2 + 3x - 4$
Logo X = 1 ou x= -4

15- Sabe-se que a equação do segundo grau $x^2-5x-14=0$ tem duas raízes reais e distintas. Logo, a raiz natural que forma o seu conjunto solução é:

a)7
b)4
c)-14
d)8
e) -2

16- O triplo do quadrado do número de filhos de Pedro é igual a 63 menos 12 vezes o número de filhos. Quantos filhos Pedro tem?

3x^2=63−12x

$3x^2+12x-63=0$

a= 3

b= 12

c= −63

x=−12±122−4·3·(−63)2·3

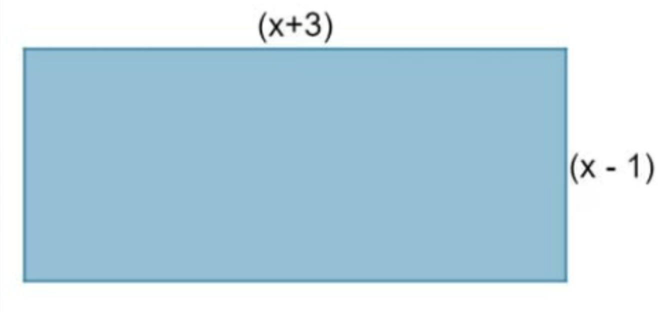
x=−12±9006

x=−12±306

x'=−12+306=186=3

$x''=-12-306=-426=-7$

17- Uma região retangular teve as suas dimensões descritas em metros, conforme a imagem a seguir:



Qual valor de x faz com que a área dessa figura seja igual a 21?

$(x+3)\ (x-1)\ =21$

$x^2+2x-3-21=0$

$x^2+2x-24=0$

$a=1$

$b=2$

$c=-24$

$x= (-2\pm\sqrt{(2^2-4\cdot 1\cdot (-24))}) / (2\cdot 1)$

$x= (-2\pm\sqrt{100})\ /2$

$x'= (-2+10)\ /2=8/2=4$

$x''= (-2-10)\ /2=-12/2=-6$

18- Comprei 4 lanches a um certo valor unitário. De outro tipo de lanche, com o mesmo preço unitário, a quantidade comprada foi igual ao valor unitário de cada lanche. Paguei com duas notas de cem reais e recebi R$ 8,00 de troco. Qual o preço unitário de cada produto?

$4x+x\cdot x+8=200$

$x^2+4x-192=0$

$a= 1$

$b= 4$

$c= -192$

$x=-4\pm 4^2-4\cdot 1\cdot(-192)2\cdot 1$

$x=-4\pm 7842$

$x=-4\pm 282$

$x'=-4+282=242=12$

$x''=-4-282=-322=-16$

19- (IFSC/2017) Pedro é pecuarista e, com o aumento da criação, ele terá que fazer um novo cercado para acomodar seus animais. Sabendo-se que ele terá que utilizar 5 voltas de arame farpado e que o cercado tem forma retangular cujas dimensões são as raízes da equação $x^2 - 45x$

+ 500 = 0, qual a quantidade mínima de arame que Pedro terá que comprar para fazer esse cercado?

Assinale a alternativa CORRETA.

A) 200m.
B) 225m.
C) 450m.
D)545m.
E) 500m.

$$x = \frac{-(-45) \pm \sqrt{(-45)^2 - 4 \times (1) \times (500)}}{2 \times (1)} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{45 \pm \sqrt{2025 - (2000)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{45 \pm \sqrt{25}}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{45 + 5}{2} \vee x = \frac{45 - 5}{2} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{50}{2} \vee x = \frac{40}{2}$$

$$S = \{25, 20\}$$

Como as medidas dos lados são 25m e 20m e serão 5 voltas de arame em cada lado, o total de arame pode ser dado por:

(25+20+25+20) · 5 = 450

20- (CP2) Luíza estava brincando com seu joguinho no celular, no qual uma serpente deve comer os insetos que aparecem na tela. No início do jogo, a serpente é formada por um retângulo de dimensões x mm por (5x + 12) mm e, a cada inseto que come, ela aumenta o seu tamanho em um quadrilátero de área 10 mm². Após comer 8 insetos, a serpente, totalmente esticada, representa um retângulo de área 112 mm².

As dimensões da serpente, em milímetros, no início do jogo são, respectivamente, iguais a

a) 1,6 e 20,0.

b) 2,0 e 22,0.

c) 3,6 e 30,0.

d) 4,0 e 32,0.

A área inicial (Ai) formado pelo retângulo da serpente pode ser compreendida como:

Ai = x * (5x + 12)

Foi nos informado na tarefa que após comer um inseto a serpente aumenta sua área em 10 mm², e que após comer 8 insetos a sua área total passou a ser 112 mm².

Logo, sua área total (At) é calculada com a soma da sua área inicial (Ai) junto com a área adquirida ao comer os 8 insetos:

$Ai + (8 * 10) = At$

$Ai + (8 * 10) = 112$

$Ai + 80 = 112$

$Ai = 112 - 80$

Ai = 32

$5x^2 + 12x - 32 = 0$

Foi formado uma equação do 2° grau, então para resolvê-la vamos aplicar Bhaskara:

$x = -(12 \pm \sqrt{12^2 - 4 * 5 * (-32)}) / 2 * 5$

$x = (-12 \pm \sqrt{784}) / 10$

$x = (-12 \pm 28) / 10$

$x' = (-12 + 28) / 10 = 16/10 = 1{,}6$

$x'' = (-12 - 28) / 10$

$= -40/10 = -4$

Como a medida tem que ser um número positivo utilizamos 1,6

Logo as dimensões iniciais:

x = 1,6 mm

5*1,6 + 12 = 20 mm

7.4. Referências

BRASIL ESCOLA. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/problemas-envolvendo-uso-equacoes.htm. Acesso em: 28 out. 2023.

TODA MATERIA Disponível em: https://www.todamateria.com.br/equacao-do-1-grau-com-uma-incognita-exercicios/. Acesso em: 28 out. 2023.

MATEMATICA DIDATICA. Disponível em: https://www.matematicadidatica.com.br/EquacaoSegundoGrauExercicios.aspx. Acesso em: 28 out. 2023.

7.5. Relatório Aula 3

Na aula compareceram quinze alunos, começamos com uma revisão do conteúdo passado na última aula, os alunos tiveram bastante dúvidas da última lista e respondemos todas elas. Explicamos também as propriedades da raiz e mostramos que é uma potência fracionária, já que isso não tinha sido mencionado na aula anterior. Para essa retomada de conteúdo utilizamos uma hora, sendo que tínhamos planejado que aconteceria em apenas vinte minutos. Isso porque os alunos tiveram muitas dúvidas e, até saná-las todas, levamos bastante tempo.

Ao iniciar o conteúdo planejado para aula, que era equações do primeiro e segundo grau, foi perceptível que a maioria dos alunos já tinha um bom entendimento de como resolver equações do primeiro grau. As definições foram explicadas e os exemplos ajudaram muito os alunos a entenderem a ideia de operar dos dois lados da equação para manter a igualdade. Muitos alunos tiveram dúvidas na lista e um dos exercícios que fez surgir mais indagações foi um que possuía um enunciado que parecia ambíguo, mas não era. Sendo assim, explicamos para os alunos qual era a forma correta de se interpretar o que estava escrito. A questão 6 da lista foi uma das que mais causou confusão nos alunos, sendo que precisava calcular uma equação com frações, e o resultado da incógnita precisava ser multiplicado por dois para achar a verdadeira resposta, o exercício gerou bastante discussão entre os alunos, e os professores mostraram no quadro o passo a passo para sua resolução. As questões demoraram até mais do que o previsto e uma pequena porção do conteúdo do primeiro horário acabou sendo estendida ao segundo. Por exemplo, o jogo “Conecta das Equações”, o qual estava previsto para ser realizado antes do intervalo, teve que ser adiado.

Começando o segundo horário terminamos de tirar dúvidas da lista de equação de primeiro grau e começamos o jogo “Conecta das Equações”, esse foi bem-sucedido, os alunos não tiveram muitas dificuldades em solucionar as equações propostas nesta atividade e o jogo também gerou uma boa interação entre os discentes. Duas duplas em específico ficaram um pouco para trás e tivemos uma aluna com dificuldades para realizar operações matemáticas básicas como adição, subtração, multiplicação e divisão, este foi o primeiro encontro que a aluna em questão esteve presente desde o começo do PROMAT, procuramos dar uma atenção maior para ela durante a aula.

Após o jogo continuamos a aula abordando o conteúdo de equações de segundo grau. Foram expostas duas maneiras para resolver equações desse tipo, a fórmula resolutiva de equações de segundo grau e em seguida o método da soma e produto. Propomos alguns exercícios para resolverem e os auxiliamos individualmente nesse momento, a maioria dos alunos optou pela fórmula resolutiva de equações do segundo grau para resolver esses exercícios, tendo em vista que eles se sentiam mais seguros utilizando esse método. Foi perceptível que alguns alunos tiveram dificuldades, tais como reconhecer quais eram os coeficientes da equação de 2° grau e compreender a ideia de que, em certos casos, há duas respostas possíveis para a igualdade. Entretanto, a maioria conseguiu compreender o conteúdo. O tempo não foi suficiente para realizarem todas as atividades, inclusive não conseguimos utilizar um jogo de dominó sobre equações do segundo grau que havíamos preparado, por isso propomos que terminassem de resolver a lista em casa e, no início da próxima aula, pretendemos sanar as dúvidas que apresentarem e explorar um pouco mais sobre esse conteúdo.

8. Encontro 4

8.1. Plano de aula 07/10/2023

Público-alvo: Alunos do Promat

Professores: Fabricio Rustick / Felipe Augusto Klumb / Felipe Simão / Milleni Ferreira

Conteúdos: Sistemas de equações lineares 2x2 e 3x3 determinados, indeterminados e impossíveis

Professores: Fabrício Rustick, Felipe Simão, Felipe Klumb, Milleni Ferreira

Objetivo geral:

Compreender como funcionam os algoritmos e métodos de resolução de sistemas lineares

Solucionar diversos problemas sobre sistemas lineares

Objetivo específico:

Compreender e interpretar corretamente os enunciados de exercícios a fim de resolvê-los

Tempo de execução: 01 aula do Promat (3h 40 min)

Recursos didáticos: Quadro, giz, folha de exercícios, projetor.

Metodologia de encaminhamento:

Os professores iniciarão a aula distribuindo uma folha com uma revisão sobre os conceitos da aula passada (equações de 1° e 2° grau), visto que esses fundamentos serão importantes nessa aula. Será dado um tempo (cerca de 10 minutos) para que haja o esclarecimento de algumas dúvidas acerca da lista da aula anterior. Após isso, serão abordadas as definições de sistemas de equações.

Definição: Um sistema de equações é um conjunto de equações que devem todos ser válidas simultaneamente. Na maioria dos casos, um sistema possui mais de uma incógnita. Ele pode ser denotado por meio de uma chave grande que engloba várias equações. Um exemplo de sistema é:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 4 \\ 4x - y = -7 \end{cases}$$

Repare que se substituirmos o valor de x por -1 e y por 3, ambas as equações são satisfeitas. Isso significa que esses valores são as respostas do nosso sistema. Existem vários valores para x e y que resolvem apenas a primeira equação, como por exemplo:

$x = -4$ e $y = 8$;

$x = 2$ e $y = -2$;

$x = 8$ e $y = -12$

Assim como também existem inúmeros pares de valores para x e y que servem de resposta para a segunda equação, mas não servem para a primeira, tais como:

$x = 0$ e $y = 7$

$x = 1$ e $y = 11$

$x = 2$ e $y = 15$

Entretanto, o par $x = -1$ e $y = 3$ é o único par existente que resolve ambas ao mesmo tempo.

O sistema trabalhado como exemplo tem 2 equações e 2 incógnitas (podendo também ser chamado de sistema 2x2). Entretanto poderíamos ter sistemas com qualquer número de equações e incógnitas. Por exemplo, o seguinte sistema possui 3 equações e 3 incógnitas (sistema 3x3):

$$\begin{cases} 5x - 2y + z = -5 \\ x + 3y + 2z = 6 \\ 3x + y - 3z = -8 \end{cases}$$

Aqui, os valores que resolvem o problema são $x = -1$, $y = 1$ e $z = 2$ (os professores pedirão para que os alunos verifiquem isso). O número de equações e de incógnitas não precisa ser o mesmo.

Também será passada aqui a classificação de sistemas:

Definição: Um sistema é dito possível e determinado (SPD) quando há apenas um conjunto solução, ou seja, há apenas um valor para cada incógnita que resolvem todas as equações simultaneamente.

O sistema é possível e indeterminado (SPI) quando há infinitos conjuntos solução, ou seja, há infinitos valores que as incógnitas podem assumir a fim de solucionar o sistema.

Por fim, um sistema é dito impossível quando não há conjunto solução, ou seja, não existem quaisquer números reais que satisfaçam todas as equações.

Dada a definição de sistemas, os professores irão começar a trabalhar métodos de resolução. Será iniciada a discussão do método da soma para resolver sistemas de 2 equações e 2 incógnitas.

O método da soma consiste em multiplicarmos uma das equações por um número de nossa escolha a fim de que, ao somarmos as duas equações, haja o cancelamento de uma das incógnitas, restando apenas uma equação de 1 incógnita. Por exemplo, para resolver o sistema apresentado anteriormente

$$\begin{cases} 5x + 3y = 4 \\ 4x - y = -7 \end{cases}$$

Podemos multiplicar ambos os lados da segunda equação por 3, a fim de alterarmos o sistema para

$$\begin{cases} 5x + 3y = 4 \\ 12x - 3y = -21 \end{cases}$$

Agora, ao somarmos as equações, obtemos

$$(5x + 3y) + (12x - 3y) = (4) + (-21)$$

$$5x + 3y + 12x - 3y = 4 - 21$$

$$17x = -17$$

$$x = -1$$

Sabendo o valor de x, podemos substituir em qualquer uma das duas equações para encontrarmos o valor de y:

$$5(-1) + 3y = 4$$

$$-5 + 3y = 4$$

$$3y = 9$$

$$y = 3$$

Após a explicação, os professores irão solicitar que os alunos resolvam os dois seguintes sistemas utilizando o método da soma:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 7 \\ -3x + 2y = 12 \end{cases}$$

$$(Resposta: x = -2, y = 3)$$

$$\begin{cases} 2x + 8y = 5 \\ -x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$\left(Resposta: x = \frac{-1}{2}, y = \frac{3}{4}\right)$$

Depois de corrigir os exercícios junto com os alunos, os professores irão mostrar o método da substituição para resolver sistemas de 2 equações e 2 incógnitas. A ideia desse método é isolar uma das incógnitas a fim de escrevê-la como uma expressão algébrica envolvendo a outra incógnita. Por exemplo, para resolvermos o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -4x + 5y = 9 \end{cases}$$

Podemos reescrever a equação de cima como sendo:

$$2x + 3y = 1$$

$$3y = 1 - 2x$$

$$y = \frac{1 - 2x}{3}$$

Agora, com essa expressão para y, podemos substitui-la na segunda equação para obter uma equação envolvendo apenas a incógnita x.

$$-4x + 5y = 9$$

$$-4x + 5\left(\frac{1-2x}{3}\right) = 9$$

$$-4x + \frac{5-10x}{3} = 9$$

$$-12x + 5 - 10x = 27$$

$$-22x = 22$$

$$x = -1$$

Assim como antes, usamos o valor encontrado em qualquer uma das equações para acharmos o valor da outra incógnita. Substituindo na primeira equação, temos:

$$2(-1) + 3y = 1$$

$$-2 + 3y = 1$$

$$3y = 3$$

$$y = 1$$

Após a explicação, novamente os professores passarão dois exercícios para que os alunos resolvam pelo método visto (substituição):

$$\begin{cases} 3x - y = -5 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

$$(Resposta: x = 0, y = 5)$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 5y = 2 \end{cases}$$

$$\left(Resposta: x = \frac{-2}{3}, y = \frac{2}{3}\right)$$

Depois de explicarem os dois métodos de resolução para sistemas 2x2, os professores irão abordar o método de resolução para sistemas maiores, começando com sistemas 3x3. Para resolver um sistema 3x3, precisamos fazer o uso dos dois métodos vistos em conjunto. Por exemplo, vamos resolver o sistema 3x3 passado anteriormente como um exemplo:

$$\begin{cases} 5x - 2y + z = -5 \\ x + 3y + 2z = 6 \\ 3x + y - 3z = -8 \end{cases}$$

Para resolvermos ele, primeiramente escolhemos qualquer uma das incógnitas e duas equações. Por exemplo, escolheremos a incógnita z e as duas últimas equações. A partir das duas equações escolhidas, iremos utilizar o método da soma para excluir uma incógnita diferente da escolhida. Vamos começar excluindo x:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ 3x + y - 3z = -8 \end{cases}$$

Podemos multiplicar a primeira equação por -3 e somarmos na de baixo para excluir x:

$$\begin{cases} -3x - 9y - 6z = -18 \\ \ \ 3x + y - 3z = -8 \end{cases}$$

$$(-3x - 9y - 6z) + (3x + y - 3z) = (-18) + (-8)$$

$$-3x - 9y - 6z + 3x + y - 3z = -18 - 8$$

$$-8y - 9z = -26$$

Agora, isolamos y para escrevê-la como uma expressão algébrica envolvendo a nossa incógnita escolhida no início (z):

$$-8y = -26 + 9z$$

$$y = \frac{26 - 9z}{8}$$

Feito isso, fazemos o mesmo processo nas mesmas duas equações, mas agora visando a excluir a incógnita y. Voltando para as duas equações iniciais

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ 3x + y - 3z = -8 \end{cases}$$

Podemos ver que, se multiplicarmos a segunda equação por -3 e somarmos as duas igualdades, excluiremos y.

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 6 \\ -9x - 3y + 9z = 24 \end{cases}$$

$$(x + 3y + 2z) + (-9x - 3y + 9z) = (6) + (24)$$

$$x + 3y + 2z - 9x - 3y + 9z = 6 + 24$$

$$-8x + 11z = 30$$

Isolando x:

$$-8x = 30 - 11z$$

$$x = \frac{11z - 30}{8}$$

Agora, com x e y escritas em função da incógnita escolhida z, podemos usar o método da substituição na terceira equação (que ainda não foi usada) para achar o valor de z.

$$5x - 2y + z = -5$$

$$5\left(\frac{11z - 30}{8}\right) - 2\left(\frac{26 - 9z}{8}\right) + z = -5$$

$$\frac{55z - 150}{8} + \frac{-52 + 18z}{8} + z = -5$$

$$55z - 150 - 52 + 18z + 8z = -40$$

$$81z = 162$$

$$z = 2$$

Com o valor de z, é simples acharmos o valor de x e y:

$$x = \frac{11(2) - 30}{8}$$

$$x = \frac{-8}{8}$$

$$x = -1$$

$$y = \frac{26 - 9(2)}{8}$$

$$y = \frac{8}{8}$$

$$y = 1$$

Após a explicação, será passado 1 sistema 3x3 para que os alunos resolvam por esse método.

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = 5 \\ -5x + y + z = -2 \\ 3x + 4y + 2z = -2 \end{cases}$$

$$(Resposta: x = 0, y = 1, z = -3)$$

Depois de resolvido o exercício, os professores abordarão a última das técnicas de resolução de sistemas: o método do escalonamento. Esse método é muito útil para resolver sistemas grandes (3x3, 4x4 etc.), pois oferece um processo bem metódico e de fácil memorização e execução. Os docentes irão explicar esse método resolvendo o seguinte sistema com a turma:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ -x + y + 2z = -4 \\ -3x - 4y + 5z = -6 \end{cases}$$

Primeiramente, usamos a primeira equação para cancelarmos a incógnita x na segunda e na terceira equação. Fazemos isso pelo método da soma. Se simplesmente somarmos as duas primeiras equações, obtemos uma nova equação sem a incógnita x:

$$(x - 2y + 3z) + (-x + y + 2z) = (10) + (-4)$$

$$-y + 5z = 6$$

Agora, podemos substituir a segunda equação do nosso sistema pela equação encontrada

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ -y + 5z = 6 \\ -3x - 4y + 5z = -6 \end{cases}$$

Novamente, utilizamos a primeira equação para cancelar a incógnita x da última equação. Para isso, multiplicamos a primeira equação por 3 e somamos na última

$$(3x - 6y + 9z) + (-3x - 4y + 5z) = (30) + (-6)$$

$$-10y + 14z = 24$$

$$-5y + 7z = 12$$

Agora, substituímos a terceira equação do sistema pela equação encontrada

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ -y + 5z = 6 \\ -5y + 7z = 12 \end{cases}$$

Se olharmos para as duas últimas equações, veremos que elas formam um sistema 2x2 dentro do sistema 3x3 original. Esse é o intuito do método de escalonamento: reduzir a ordem do sistema. Agora, utilizaremos a segunda equação para cancelarmos a incógnita y da terceira equação. Se multiplicarmos a segunda equação por -5 e somarmos na terceira, obtemos:

$$(5y - 25z) + (-5y + 7z) = (-30) + (12)$$

$$-18z = -18$$

Substituindo essa equação pela terceira, finalmente chegamos no nosso sistema escalonado:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ -y + 5z = 6 \\ -18z = -18 \end{cases}$$

Agora, podemos resolver todas as equações de baixo para cima para achar os valores de z, y e x:

$$-18z = -18$$

$$z = 1$$

$$-y + 5(1) = 6$$

$$y = -1$$

$$x - 2(-1) + 3(1) = 10$$

$$x + 2 + 3 = 10$$

$$x = 5$$

Com a explicação, os professores irão passar dois sistemas 3x3 para que os alunos resolvam por escalonamento:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

$$(Resposta: x = 1, y = 2, z = 3)$$

$$\begin{cases} 4x - 2y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = -2 \\ 2x - 3y + z = -8 \end{cases}$$

$$\left(Resposta: x = \frac{3}{4}, y = \frac{5}{2}, z = -2\right)$$

Com isso, todos os métodos de resolução foram abordados. Agora, os professores irão passar o seguinte sistema para os alunos e pedirão para que eles resolvam pelo método que desejarem. Esse sistema possui infinitas soluções, mas essa informação não será dada aos alunos. O intuito é que eles percebam isso por conta própria.

$$\begin{cases} -4x + y - z = 7 \\ 3x - 2y - 3z = -19 \\ x - y - 2z = -10 \end{cases}$$

$$(Resposta: x = 1 - z, y = 11 - 3z, z = z)$$

Resolução:

$$(-12x + 3y - 3z) + (12x - 8y - 12z) = (21) + (-76)$$

$$-5y - 15z = -55$$

$$y + 3z = 11$$

$$\begin{cases} -4x + y - z = 7 \\ y + 3z = 11 \\ x - y - 2z = -10 \end{cases}$$

$$(-4x + y - z) + (4x - 4y - 8z) = (7) + (-40)$$

$$-3y - 9z = -33$$

$$y + 3z = 11$$

$$\begin{cases} -4x + y - z = 7 \\ y + 3z = 11 \\ y + 3z = 11 \end{cases}$$

$$(-y - 3z) + (y + 3z) = (-11) + (11)$$

$$0 = 0$$

$$z = z$$

$$y = 11 - 3z$$

$$-4x + (11 - 3z) - z = 7$$

$$-4x - 4z = -4$$

$$x = 1 - z$$

Os professores explicarão que, utilizando o método do escalonamento para resolver um sistema de infinitas soluções, chegaremos sempre em uma igualdade do tipo $0 = 0$. Com isso, devemos escolher uma incógnita e escrever todas as outras em função desta. Será explicado também que esse é um exemplo de sistema possível e indeterminado. Então, será passado um sistema 2x2 possível e indeterminado para que os alunos resolvam:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$$

$$\left(Resposta: x = x, y = \frac{1-x}{2}\right)$$

Agora, serão abordados sistemas impossíveis. Os professores passarão o seguinte sistema 2x2 (sem falar aos alunos que ele é impossível) e os deixarão livres para escolher o método que quiserem.

$$\begin{cases} -3x + y = 2 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases}$$

Resolução:

$$(-6x + 2y) + (6x - 2y) = (4) + (0)$$

$$0 = 4$$

Será explicado que, por conta de chegarmos em uma igualdade que não é válida, o sistema não admite solução. Após isso, os professores mostrarão outro sistema impossível para os alunos (agora 3x3). Será dito para eles que o sistema é impossível, mas que mesmo assim eles tentassem resolver, para chegar em uma igualdade inválida.

$$\begin{cases} -x + 3y + z = 2 \\ 3x - 3y + 3z = -5 \\ -5x + 2y - 8z = -7 \end{cases}$$

Resolução:

$$(-3x + 9y + 3z) + (3x - 3y + 3z) = (6) + (-5)$$

$$6y + 6z = 1$$

$$\begin{cases} -x + 3y + z = 2 \\ 6y + 6z = 1 \\ -5x + 2y - 8z = -7 \end{cases}$$

$$(5x - 15y - 5z) + (-5x + 2y - 8z) = (-10) + (-7)$$

$$-13y - 13z = -17$$

$$\begin{cases} -x + 3y + z = 2 \\ 6y + 6z = 1 \\ -13y - 13z = -17 \end{cases}$$

$$(78y + 78z) + (-78y - 78z) = (13) + (-102)$$

$$0 = -89$$

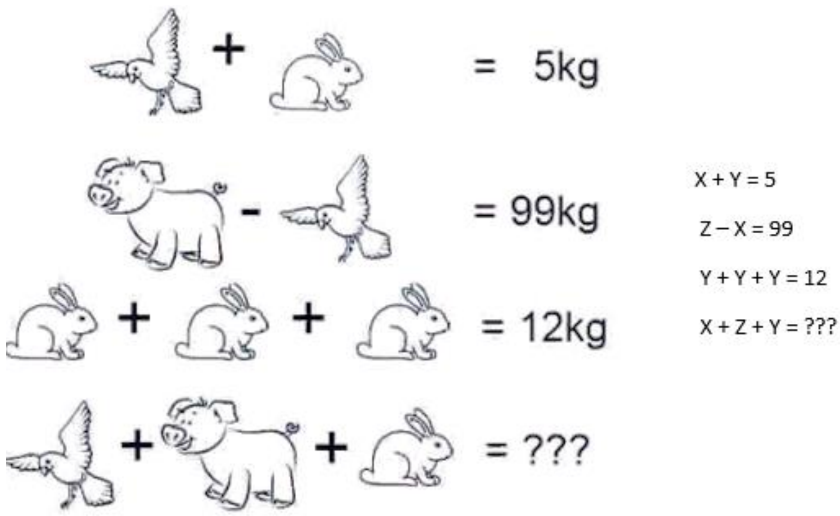
Como chegamos em um absurdo, o sistema é impossível.

Para finalizar, os professores mostrarão o método do determinante para verificar se um sistema linear de equações é SPD ou não

Após a apresentação de todo o conteúdo, os professores trabalharão a lista de exercícios do final da aula junto com os alunos. Os alunos responderão às questões enquanto os professores passam pelas carteiras sanando dúvidas.

8.2. Lista de Exercícios

1) Sistemas de Equações ilustradas estão ganhando espaço nas redes sociais. A ideia é alterar as tradicionais letras de algumas equações por imagens, geralmente de um tema específico. A forma de resolução não é diferente da tradicional seguindo uma sequência lógica e a última equação, muitas vezes, requer uma atenção especial.



Exemplo:

Crie um sistema ilustrativo usando as figuras que preferir e entregue para um colega resolver. Atenção: seu sistema deve ser possível e determinado.

Já contém um exemplo de resposta

2) (COPERGAS (Adaptada) Um grupo de amigos janta em uma lanchonete. Na hora de pagar a conta, cada um contribui com 15 reais, mas eles verificam que faltam 35 reais. Então cada um contribui com mais 5 reais, com os quais o total é suficiente para pagar a conta e ainda sobram 10% do valor do jantar para a gorjeta. Qual é o número de amigos que foram jantar?

Vou chamar o número de amigos de A e a conta de C. Temos duas equações

15A = C – 35

20A = C + C/10

20A = (10C+C) /10 à 200ª = 11C à 200A/11= C

Isolando o C, trocamos ele na outra equação

15A = 200A/11 – 35 à 15A = (200A – 385) /11 à 165A = 200A – 385 a 385= 35A

A= 11

3) (SEDUC-TO) Sejam x, y, z e w números racionais positivos tais que

$$x + y + z = 3{,}7$$
$$x + y + w = 2{,}8$$
$$x + z + w = 3{,}5$$
$$y + z + w = 3{,}2$$

A diferença entre o maior e o menor desses quatro números é?

3(x+y+z+w) = 3,7+2,8+3,5+3,2 --à 3(x+y+z+w) = 13,2 -à x+y+z+w = 4,4

x+y+z= 3,7. Logo W = 4,4 – 3,7 = 0,7

x + y + w = 2,8. Logo z = 4,4 – 2,8 = 1,6

x + z + w = 3,5. Logo y = 4,4 – 3,5 = 0,9

y + z + w = 3,2. Logo x = 4,4 – 3,2 = 1,2

1,6 – 0,7 = 0,9

4) UNESP (Adaptada) Carlos tem uma meta de valor a arrecadar com a venda de certo total de unidades de um produto. Se ele vender cada unidade do produto a R$ 20,00, ele supera a meta em R$ 300,00. Se ele vender cada unidade do produto a R$ 15,00, o valor arrecadado fica R$ 100,00 abaixo da meta. Para que a meta seja exatamente atingida, Carlos deverá vender cada unidade do produto por qual valor?

Vamos ter duas equações, chamando x da quantidade de produto e y de meta.

20x = y + 300

15x= y – 100

Vamos primeiro isolar y para acharmos a quantidade de produto.

5x= 400

X= 80

Agora trocamos x por 80 à 20x80 = y+300

1600 – 300 = y

Y= 1300

Queremos saber o valor que Carlos pode vender o produto que de exatamente a meta.

Logo y/x à 1300/80. Resposta: 16,25

5) (QUADRIX) Suponha-se que os números inteiros positivos A, B e C sejam tais que

A + B = 37 A × C= 420 B × C = 875.

Nesse caso, $\frac{B+C}{A}$ + B = 30.

Certo ou Errado?

Reorganizando as duas últimas equações, temos que: $A = \frac{420}{C}$ e $B = \frac{875}{C}$. Substituindo essas informações na primeira igualdade:

$$\frac{420}{C} + \frac{875}{C} = 37$$

$$420 + 875 = 37C$$

$$C = \frac{1295}{37}$$

$$C = 35$$

Substituindo o valor de C nas duas últimas equações:

$$A \cdot (35) = 420$$

$$A = 12$$

$$B \cdot (35) = 875$$

$$B = 25$$

Com isso, a expressão solicitada se torna:

$$\frac{25 + 35}{12} + 25$$

$$\frac{60}{12} + 25$$

$$5 + 25 = 30$$

Logo, está correto.

6) Ana, Beatriz, Carla e Daniela foram ao shopping fazer compras. Daniela pediu o cartão de sua mãe emprestado e ela deixou, fazendo apenas um pedido: que Daniela a dissesse quanto foi gasto ao fim das compras. Na loja de roupas, elas compraram cintos, camisetas e calças de mesmo valor. Ao passar no caixa, todas as quatro amigas estavam distraídas e Daniela não memorizou o valor gasto. Ao perguntar às amigas quanto custava cada peça de roupa individualmente, nenhuma delas se recordava: elas só sabiam o valor total das suas compras, pois receberam um comprovante do pagamento por SMS. A quantidade de produtos comprados pelas amigas aparece na seguinte tabela:

	Cinto	Camiseta	Calça	Gasto total
Ana	1	2	1	230 reais

Beatriz	2	1	1	210 reais
Carla	1	1	2	280 reais
Daniela	0	3	1	?

Com base nas informações, Daniela deve falar para sua mãe que gastou quantos reais?

Podemos resolver esse problema de duas maneiras diferentes. Primeiramente, vamos ver como resolver por escalonamento: chamando de x o valor de cada cinto, y o valor de cada camiseta e z o valor de cada calça, podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 230 \\ 2x + y + z = 210 \\ x + y + 2z = 280 \end{cases}$$

Resolvendo pelo método de escalonamento:

$$(-2x - 4y - 2z) + (2x + y + z) = (-460) + (210)$$

$$-3y - z = -250$$

$$3y + z = 250$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 230 \\ 3y + z = 250 \\ x + y + 2z = 280 \end{cases}$$

$$(-x - 2y - z) + (x + y + 2z) = (-230) + (280)$$

$$-y + z = 50$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 230 \\ 3y + z = 250 \\ -y + z = 50 \end{cases}$$

$$(3y + z) + (-3y + 3z) = (250) + (150)$$

$$4z = 400$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 230 \\ 3y + z = 250 \\ 4z = 400 \end{cases}$$

Com o sistema escalonado, podemos concluir que:

$$z = 100$$

$$3y + (100) = 250$$

$$y = 50$$

$$x + 2(50) + (100) = 230$$

$$x = 30$$

Com os valores de cada peça separado, podemos concluir que Daniela gastou 250 reais.

A outra maneira de se resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 230 \\ 2x + y + z = 210 \\ x + y + 2z = 280 \end{cases}$$

é somando todas as equações (semelhante ao que foi feito no exercício 3)

$$(x+2y+z)+(2x+y+z)+(x+y+2z)=(230)+(210)+(280)$$

$$4x+4y+4z=720$$

$$4(x+y+z)=720$$

$$x+y+z=180$$

Esse método só funciona para esse exercício porque fomos capazes de achar uma expressão para a soma de todas as incógnitas. Agora, podemos utilizar essa equação que acabamos de obter na primeira equação do sistema para acharmos o valor de y:

$$x+2y+z=230$$

$$x+y+y+z=230$$

$$(x+y+z)+y=230$$

$$180+y=230$$

$$y=50$$

Podemos, também, utilizá-la na segunda equação do sistema para obter o valor de x:

$$2x+y+z=210$$

$$x+x+y+z=210$$

$$(x+y+z)+x=210$$

$$180+x=210$$

$$x=30$$

Por fim, fazemos o mesmo procedimento na última equação para acharmos o valor de z:

$$x+y+2z=280$$

$$x+y+z+z=280$$

$$(x+y+z)+z=280$$

$$180+z=280$$

$$z=100$$

7) Determine o valor de k para que o sistema

$$\begin{cases} 2x+ky+(k-1)z=3 \\ x+ky+z=2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

Seja possível e determinado.

Aqui, calculamos o determinante da matriz associada ao sistema de equações

$$\begin{matrix} 2 & k & (k-1) \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

$$det=\big(2k+k+(k-1)\big)-(k(k-1)+2+k)$$

$$det=4k-1-k^2-2$$

$$det=-k^2+4k-3$$

Para que o sistema seja SPD, o determinante não pode ser zero. Por isso, vamos verificar para quais valores ele é nulo:

$$-k^2 + 4k - 3 = 0$$

Para resolver essa equação do 2° grau, podemos utilizar a fórmula resolutiva (Bhaskara) ou fazer por soma e produto. Para resolver por soma e produto, primeiro multiplicamos ambos os lados por -1 para que o coeficiente de k^2 seja 1:

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$

Agora, as raízes k_1 e k_2 da equação são números tais que "somados resultam em b com o sinal trocado e multiplicados resultam em c", ou seja:

$$k_1 + k_2 = 4$$

$$k_1 \cdot k_2 = 3$$

Daqui, podemos ver que esses dois números devem ser:

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = 3$$

Portanto, k pode ser qualquer número real, exceto 1 ou 3, para que o sistema seja SPD.

8) (FCMSC-SP) O sistema

$$\begin{cases} ax + y + z = b \\ 2x + y + z = 1 \\ 2ax - y + z = 0 \end{cases}$$

a) É possível e determinado se, e somente se, $a \neq 0$

b) É possível e determinado se, e somente se, $a \neq 2$

c) É indeterminado se, e somente se, $a = b = 2$

d) É indeterminado, para quaisquer valores reais de a e b

e) É impossível, para quaisquer valores reais de a e b

Para determinar se um sistema é SPD ou não, começamos por calcular qual é o determinante da matriz associada ao sistema de equações. Se o determinante for diferente de zero, o sistema admite uma única solução (é possível e determinado). Caso contrário, ele pode ter infinitas soluções (possível e indeterminado) ou pode não ter solução (sistema impossível). Montando a matriz e calculando o determinante, temos:

$$\begin{matrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2a & -1 & 1 \end{matrix}$$

$$det = (a + 2a - 2) - (2a - a + 2)$$

$$det = a + 2a - 2 - 2a + a - 2$$

$$det = 2a - 4$$

Igualando a expressão a zero, podemos verificar para quais valores de a o determinante será nulo

$$2a - 4 = 0$$

$$2a = 4$$

$$a = 2$$

Logo, podemos ver que a resposta correta é a letra b, visto que, se $a \neq 2$, $det \neq 0$ e o sistema é possível e determinado.

9) Para que o sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - ky + z = 0 \\ kx - y - z = 0 \end{cases}$$

Tenha solução diferente da solução $x = y = z = 0$, k deve ser um número real tal que:

a) $k = -1$ ou $k = 0$

b) $k = 2$ ou $k = 1$

c) $k > 1$

d) $k < -1$

e) $k \neq 0$

Assim como nos dois últimos exercícios, montamos a matriz associada a esse sistema de equações e calculamos seu determinante. A solução $x = y = z = 0$ é a chamada solução trivial do sistema de equações. Todo sistema que possui apenas zeros nos lados direitos das equações (como o desse exercício) possui ao menos a solução trivial, logo, nunca é impossível. Se o sistema for SPD, a solução trivial é a única existente. Caso ele seja SPI, há infinitas outras soluções além dessa. Montando a matriz associada:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -k & 1 \\ k & -1 & -1 \end{matrix}$$

$$det = (k - 2 + k) - (-2k^2 - 1 - 1)$$

$$det = k - 2 + k + 2k^2 + 1 + 1$$

$$det = 2k^2 + 2k$$

Estamos interessados em saber para quais valores de k o determinante é igual a zero

$$2k^2 + 2k = 0$$

Podemos resolver essa equação de 2° grau normalmente usando a fórmula resolutiva (Bhaskara) ou soma e produto. Entretanto, como $c = 0$, podemos colocar o termo $2k$ em evidência (por ser um fator comum) e obter que:

$$2k(k + 1) = 0$$

Se o produto é igual a zero, significa que um dos fatores $2k$ ou $(k + 1)$ são iguais a zero. Sendo assim:

$$2k_1 = 0$$

$$k_1 = 0$$

$$k_2 + 1 = 0$$

$$k_2 = -1$$

Logo, se $k = 0$ ou $k = -1$, o determinante é igual a zero e o sistema não é SPD. Dessa forma, ele não possui solução única. Com isso, concluímos que a alternativa correta é a letra a

10) Se o sistema linear:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{cases}$$

é impossível, então:

a) $a = 0$

b) $a = \frac{-14}{3}$

c) $a = \frac{3}{4}$

d) $a = 1$

e) $a = 28$

Como o sistema é impossível, sabemos que ele não é SPD (pois não possui solução única). Logo, se calcularmos o determinante da matriz associada ao sistema, ele deve ser igual a zero. Montando a matriz e realizando as contas:

$$\begin{matrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{matrix}$$

$$det = (6a + 6 + 1) - (-4 + 3a - 3)$$

$$det = 6a + 7 + 4 - 3a + 3$$

$$det = 3a + 14$$

Igualando o determinante a zero e isolando a, obtemos:

$$3a + 14 = 0$$

$$3a = -14$$

$$a = \frac{-14}{3}$$

Que é a alternativa b

11) (UNICAMP-SP) Resolva o seguinte sistema:

$$2x + y + z + w = 1$$

$$x + 2y + z + w = 2$$

$$x + y + 2z + w = 3$$
$$x + y + z + 2w = 4$$

Aqui, não temos as chaves para indicar o sistema, mas a ideia é que essas equações compõem um sistema 4x4 (eu não sei fazer chaves para sistema 4x4 no word kkkk). Podemos resolver pelo método do escalonamento ou pelo método de somar todas as equações, assim como havia sido feito nos exercícios 3 e 6. Primeiramente, vou resolver pelo segundo método (que é mais prático) e depois vou resolver a mesma questão por escalonamento, para que vocês tenham um exemplo de escalonamento de sistema 4x4 completo.

Somando os lados esquerdo e direito de todas as equações, obtemos:

$$(2x + y + z + w) + (x + 2y + z + w) + (x + y + 2z + w) + (x + y + z + 2w) = (1) + (2) + (3) + (4)$$
$$5x + 5y + 5z + 5w = 10$$
$$5(x + y + z + w) = 10$$
$$x + y + z + w = 2$$

Agora, utilizamos a equação recém obtida nas quatro equações do sistema para obtermos o valor de cada uma das incógnitas. Começamos pela primeira equação:

$$2x + y + z + w = 1$$
$$x + x + y + z + w = 1$$
$$x + (x + y + z + w) = 1$$
$$x + 2 = 1$$
$$x = 1 - 2$$
$$x = -1$$

Fazemos exatamente o mesmo processo na segunda para descobrir y:

$$x + 2y + z + w = 2$$
$$x + y + y + z + w = 2$$
$$y + (x + y + z + w) = 2$$
$$y + 2 = 2$$
$$y = 2 - 2$$
$$y = 0$$

Agora, na terceira:

$$x + y + 2z + w = 3$$
$$x + y + z + z + w = 3$$
$$z + (x + y + z + w) = 3$$
$$z + 2 = 3$$
$$z = 3 - 2$$
$$z = 1$$

Por fim, descobrimos w com a quarta equação:

$$x + y + z + 2w = 4$$
$$x + y + z + w + w = 4$$
$$w + (x + y + z + w) = 4$$
$$w + 2 = 4$$
$$w = 4 - 2$$
$$w = 2$$

Agora, vamos resolver o mesmo problema por escalonamento. O processo é metódico: por meio do método da adição, usamos a primeira equação para excluirmos o x de todas as equações abaixo dela. Feito isso, usamos a segunda equação (que estará sem x) para excluirmos o y de todas as equações abaixo dela. Depois, usamos a terceira (sem x nem y) para excluir z da última equação, o que já nos dará a resposta. Vamos ver novamente o sistema:

$$2x + y + z + w = 1$$
$$x + 2y + z + w = 2$$
$$x + y + 2z + w = 3$$
$$x + y + z + 2w = 4$$

Se multiplicarmos a segunda equação por -2 e somarmos na primeira, cancelaremos x:

$$2x + y + z + w = 1$$
$$-2x - 4y - 2z - 2w = -4$$
$$(2x + y + z + w) + (-2x - 4y - 2z - 2w) = (1) + (-4)$$
$$-3y - z - w = -3$$

Com essa equação, atualizamos o nosso sistema, substituindo a segunda equação por ela:

$$2x + y + z + w = 1$$
$$-3y - z - w = -3$$
$$x + y + 2z + w = 3$$
$$x + y + z + 2w = 4$$

Agora, vamos usar o método da adição entre a primeira equação e a terceira para cancelar x. Ao multiplicar a terceira equação por -2 e somarmos com a primeira:

$$2x + y + z + w = 1$$
$$-2x - 2y - 4z - 2w = -6$$
$$(2x + y + z + w) + (-2x - 2y - 4z - 2w) = (1) + (-6)$$
$$-y - 3z - w = -5$$

Cancelamos x. Com isso atualizamos o sistema substituindo a terceira equação pela que acabamos de obter:

$$2x + y + z + w = 1$$

$$-3y - z - w = -3$$

$$-y - 3z - w = -5$$

$$x + y + z + 2w = 4$$

Fazemos o mesmo processo entre a quarta e primeira linha para terminar a primeira parte do escalonamento. Multiplicando a última por -2 e somando com a primeira:

$$2x + y + z + w = 1$$

$$-2x - 2y - 2z - 4w = -8$$

$$(2x + y + z + w) + (-2x - 2y - 2z - 4w) = (1) + (-8)$$

$$-y - z - 3w = -7$$

$$2x + y + z + w = 1$$

$$-3y - z - w = -3$$

$$-y - 3z - w = -5$$

$$-y - z - 3w = -7$$

Agora que excluímos a primeira incógnita, vamos para a segunda. Para isso, usamos sempre o método da adição com a segunda equação para excluir y da terceira e quarta equação. Ao multiplicarmos a terceira por -3 e somarmos na segunda, obtemos:

$$-3y - z - w = -3$$

$$3y + 9z + 3w = 15$$

$$(-3y - z - w) + (3y + 9z + 3w) = (-3) + (15)$$

$$8z + 2w = 12$$

$$4z + w = 6$$

Cancelando a incógnita y, substituímos essa equação pela terceira equação do nosso sistema e reescrevemos:

$$2x + y + z + w = 1$$

$$-3y - z - w = -3$$

$$4z + w = 6$$

$$-y - z - 3w = -7$$

Agora, pelo método da adição entre a segunda e a quarta equação, cancelamos y. Multiplicando a quarta equação por -3, obtemos:

$$-3y - z - w = -3$$

$$3y + 3z + 9w = 21$$

$$(-3y - z - w) + (3y + 3z + 9w) = (-3) + (21)$$

$$2z + 8w = 18$$

$$z + 4w = 9$$

Substituindo a quarta equação do sistema pela que acabamos de obter, atualizamos ele para:

$$2x + y + z + w = 1$$
$$-3y - z - w = -3$$
$$4z + w = 6$$
$$z + 4w = 9$$

Agora, chegamos na etapa final: utilizamos a terceira equação para excluir a incógnita z da equação abaixo dela por meio do método da adição. Multiplicando a quarta equação por -4, podemos fazer o cancelamento:

$$4z + w = 6$$
$$-4z - 16w = -36$$
$$(4z + w) + (-4z - 16w) = (6) + (-36)$$
$$-15w = -30$$

Antes de resolver a equação, podemos atualizar nosso sistema substituindo a última equação pela equação que acabamos de obter

$$2x + y + z + w = 1$$
$$-3y - z - w = -3$$
$$4z + w = 6$$
$$-15w = -30$$

Esse é o nosso sistema escalonado. Agora, vamos resolvendo todas as equações de baixo para cima para descobrir os valores de cada incógnita.

$$-15w = -30$$
$$w = 2$$

Sabendo w, descobrimos z pela terceira equação

$$4z + w = 6$$
$$4z + (2) = 6$$
$$4z = 6 - 2$$
$$4z = 4$$
$$z = 1$$

Sabendo w e z, descobrimos y pela segunda equação

$$-3y - z - w = -3$$
$$-3y - (1) - (2) = -3$$
$$-3y - 3 = -3$$
$$-3y = -3 + 3$$
$$-3y = 0$$
$$y = 0$$

Por fim, sabendo y, z e w, descobrimos x pela primeira equação

$$2x + y + z + w = 1$$

$$2x + (0) + (1) + (2) = 1$$

$$2x + 3 = 1$$

$$2x = 1 - 3$$

$$2x = -2$$

$$x = -1$$

Independentemente do método empregado, sempre chegaremos ao mesmo resultado: $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$, $w = 2$

12) Você trabalha no setor de compras de uma montadora de caminhões. Na semana que vem, serão montados apenas cavalos mecânicos na sexta-feira. O cavalo mecânico simples possui 2 eixos (6 rodas) e o cavalo mecânico trucado possui 3 eixos (10 rodas). Foi solicitado a você comprar exatamente 100 pneus para serem utilizados nessa montagem. Também foi pedido para você comprar as lanternas dos faróis desses caminhões (duas para cada caminhão). Sabendo que, por norma da empresa, os números de caminhões fabricados de cada tipo devem ser os mais próximos possíveis, quantas lanternas deverão ser compradas?

Vamos chamar a quantidade de cavalos mecânicos simples que será produzida de s e a quantidade de cavalos mecânicos trucados de t. Cada cavalo mecânico simples possui 6 rodas. Logo, a quantidade de pneus necessária para montá-los será $6 \cdot s$. De maneira semelhante, a quantidade de pneus necessária para montar os cavalos mecânicos trucados será $10 \cdot t$. Como a quantidade total de pneus comprados será de 100 unidades, podemos escrever que

$$6s + 10t = 100$$

Podemos dividir ambos os lados da igualdade com o intuito de simplificá-la:

$$3s + 5t = 50$$

Agora, normalmente precisaríamos de outra equação envolvendo s e t para montarmos um sistema linear e achar ambos os valores. Entretanto, não podemos extrair nenhuma outra equação do enunciado. Para resolver esse problema, devemos levar em consideração o fato de que s e t são números inteiros, pois não se pode montar uma fração de um caminhão. Sendo assim, vamos listar todas as possibilidades de montagens. Para isso, vamos atribuir diversos valores para s na única equação obtida e verificar os respectivos valores para t. Se $s = 1$, temos:

$$3(1) + 5t = 50$$

$$3 + 5t = 50$$

$$5t = 50 - 3$$

$$5t = 47$$

$$t = \frac{47}{5}$$

Como obtivemos um valor fracionário para t, significa que não será feito apenas um cavalo mecânico simples. Se $s = 2$, temos:

$$3(2) + 5t = 50$$
$$6 + 5t = 50$$
$$5t = 50 - 6$$
$$5t = 44$$
$$t = \frac{44}{5}$$

De modo semelhante ao que obtivemos antes, não é possível que haja apenas 2 cavalos mecânicos simples na montagem. Seguindo com esse raciocínio, podemos verificar que, quando $s = 5$, obtemos um valor inteiro para t:

$$3(5) + 5t = 50$$
$$15 + 5t = 50$$
$$5t = 50 - 15$$
$$5t = 35$$
$$t = 7$$

Portanto, montar 5 cavalos simples e 7 cavalos trucados é um exemplo de montagem que exige exatamente 100 pneus para ser feita. Continuando a atribuir valores para s até encontrarmos um valor inteiro para t, verificamos que, se $s = 10$:

$$3(10) + 5t = 50$$
$$30 + 5t = 50$$
$$5t = 50 - 30$$
$$5t = 20$$
$$t = 4$$

Ou seja, montar 10 cavalos simples e 4 trucados também exige 100 pneus. A última possibilidade de montagem ocorre quando $s = 15$:

$$3(15) + 5t = 50$$
$$45 + 5t = 50$$
$$5t = 50 - 45$$
$$5t = 5$$
$$t = 1$$

Para saber qual dessas quantidades realmente será produzida, consultamos a norma da empresa: “a quantidade de caminhões de cada tipo deve ser a mais próxima possível”. Sendo assim, o cenário que se adequa a essa restrição é o primeiro. Logo, serão montados 5 cavalos mecânicos simples e 7 trucados, o que totaliza um total de 12 caminhões. Como cada caminhão exige 2 lanternas, precisarão ser compradas 24 lanternas.

8.3. Referências

TODA MATÉRIA. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/sistemas-de-equacoes/. Acesso em: 18 dez. 2023.

TODA MATÉRIA. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/escalonamento-de-sistemas-lineares/. Acesso em: 18 dez. 2023.

BRASIL ESCOLA. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/classificando-as-solucoes-um-sistema-linear-escalonado.htm. Acesso em: 18 dez. 2023.

8.4. Relatório Aula 4

Nesse encontro compareceram 19 alunos. Reservamos os primeiros momentos da aula para tirar dúvidas referentes a lista de exercícios proposta no encontro anterior e retomar alguns conceitos daquela aula que era sobre equações do primeiro e segundo grau, tendo em vista que o entendimento desse assunto era importante para a atual aula, que era sobre sistemas de equações. Em um dos exercícios, um dos estagiários apresentou uma forma de solução e, uma das alunas que havia feito a resolução de forma diferente, se dispôs a ir ao quadro compartilhar a forma que pensou com a turma.

A aula correu de uma forma mais tradicional, sem atividades dinâmicas e interativas, os alunos não se mostraram tão participativos quanto nas aulas anteriores, alguns deles passaram parte da aula distraídos com outras coisas, como o celular. Diversas vezes durante as explicações os alunos apresentavam dúvidas, as quais eram sanadas pelos professores.

Uma aluna teve que sair às 09h40 em razão de compromissos pessoais. No mais, todos alunos permaneceram até o fim da aula.

Durante a resolução da lista de exercícios que foi proposta, muitos alunos apresentaram dificuldades por não terem entendido completamente os conceitos durante as explicações, por isso nós estagiários, estivemos a todo momento os auxiliando para que pudessem desenvolver os exercícios e assim termos uma garantia maior do bom andamento da aula. Além disso, cremos na possibilidade de que a aula lhes agregou algo no conhecimento, assim como desejávamos.

9. Encontro 5

9.1. Plano de Aula 14/10/2023

Público-alvo: Alunos do Promat

Conteúdos: Função Afim

Professores: Fabricio Rustick / Felipe Klumb / Felipe Simão / Milleni Ferreira de Souza

Objetivo Geral:

Compreender o conceito de função afim por meio de situações e problemas e de suas aplicações.

Objetivo Específico:

Encontrar as raízes da função Afim;

Identificar os tipos de função Afim;

Identificar as variáveis e determinar a Lei de formação;

Construir o gráfico e identificar seus coeficientes.

Tempo de execução: Uma aula do Promat (3h 40 min)

Recursos didáticos: Giz, quadro, folha sulfite, proveta, bola de gude, papel quadriculado.

Metodologia de encaminhamento:

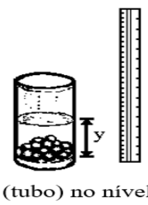
A sala estará organizada em grupos de quatro pessoas em que estarão sobre as mesas, provetas e bolinhas de gude. Começaremos a aula tirando as dúvidas sobre a lista que foi entregue na aula passada (10 min). Sequencialmente, será entregue para os alunos uma folha que falará sobre a experiência que iremos fazer e algumas questões que iremos trabalhar durante a aula. Com as folhas entregues, iremos explicar sobre a experiência e pediremos para os alunos fazer a tabela que está na folha.

Figura 13: Instruções do experimento com as provetas

Água, copo e bolinhas

A ideia para este experimento foi retirada de <http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/cfuncao/exp3.htm> e de http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/model.html, venho trabalhando com ela há 12 anos na UNIOESTE, cada ano adaptando esta atividade. Andréia Büttner Ciani.

O nível da água no copo cilíndrico (em centímetros) e o volume (em mililitros) variam de acordo com o número de bolinhas de gude que colocamos dentro do copo. As bolinhas utilizadas devem ser todas do mesmo tamanho.



Vamos considerar colocar água no copo (tubo) no nível de 80 mL para iniciar o experimento.

x - A quantidade de bolinhas como a variável independente, medida em unidades.

y - O nível de água como variável dependente, medido em centímetros, com uma régua.

Fonte: http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/model.html. Acesso em: 13 out. 2023.

No decorrer da experiência pediremos para eles preencherem a tabela.

1) Inserir as bolinhas e anotar os valores medidos com a régua em centímetros.

x unidades	**y = f(x) centímetros**
0	
1	
2	
3	
4	

Depois que os alunos montarem a tabela, vamos apresentar a definição de função:

Função é a expressão que estabelece relação entre y (variável dependente) e x (variável independente). os valores de y variam dependendo do valor atribuído a x.

Consideramos dois conjuntos:

A= {a, b, c, d}; B= {e, f, g, h, i}, uma relação f de A em B, será considerada uma função se todo elemento do conjunto A se relaciona com apenas um elemento do conjunto B.

Exemplo:

Se A= {2, 3, 4, 5} e B= {0, 1, 2, 3, 4}

A relação $f(x) = x - 2$ é função, pois todo elemento do conjunto A se relaciona com um único elemento do conjunto B. Veja:

$$f(2) = 0$$

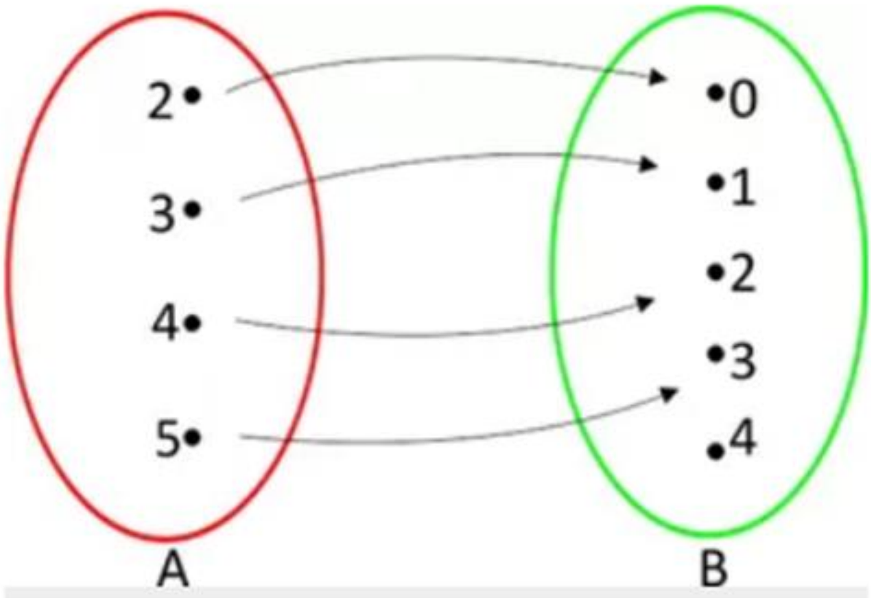
$$f(3) = 1$$

$$f(4) = 2$$

$$f(5) = 3$$

Mostraremos como podemos fazer essa representação através do diagrama de flechas:

Figura 14: Exemplo de diagrama de flechas



Fonte:http://s2educacao.glbimg.com/MKGd6DwfgB4cLWKhCteDdWmweFQ=/0x0:513x344/300x201/s.glbimg.com/po/ek/f/original/2013/09/20/conceituando_func_o_es3.jpg. Acesso em: 07 dez. 2023.

Podemos representar essa função por:

$$f: A \to B$$
$$x \to x - 2$$

Nesse momento apresentaremos os conceitos de domínio, contradomínio e imagem de uma função:

Domínio: É o conjunto de saída, compostos no elemento x aplicados na função, na notação f:A→B , o domínio é representado pela letra antes da seta;

Contradomínio: É o conjunto de chegada, na notação f:A→B é representado pelo lado direito da seta;

Imagem: É um subconjunto do contradomínio, ele é formado pelos elementos Y que saem da função de e chegam ao contradomínio, podendo ter o mesmo número de elementos ou menos.

Após isso, comentaremos sobre o que é a lei de formação de uma função, apresentando simultaneamente o conceito de função afim:

Explicação: A **lei de formação** é o que define como a função deve ser representada, a **função afim** é expressa por $y = ax + b$, onde a e b pertencem ao conjunto dos reais e a é diferente de 0.

O coeficiente a da função $f(x) = ax + b$ é denominado coeficiente angular da reta representada no plano cartesiano.

O coeficiente b é denominado coeficiente linear.

Por exemplo na função $y = 2x + 1$ o coeficiente angular é 2 e o coeficiente linear é 1.

Vamos solicitar para os alunos retornarem a tabela do experimento inicial da aula e encontrar a lei de formação correspondente a função que foi trabalhada no experimento, pediremos como o grupo pensou em fazer a lei de formação e se alguém quer fazer a lei de formação no quadro.

Passaremos uma questão para os alunos tentarem resolverem.

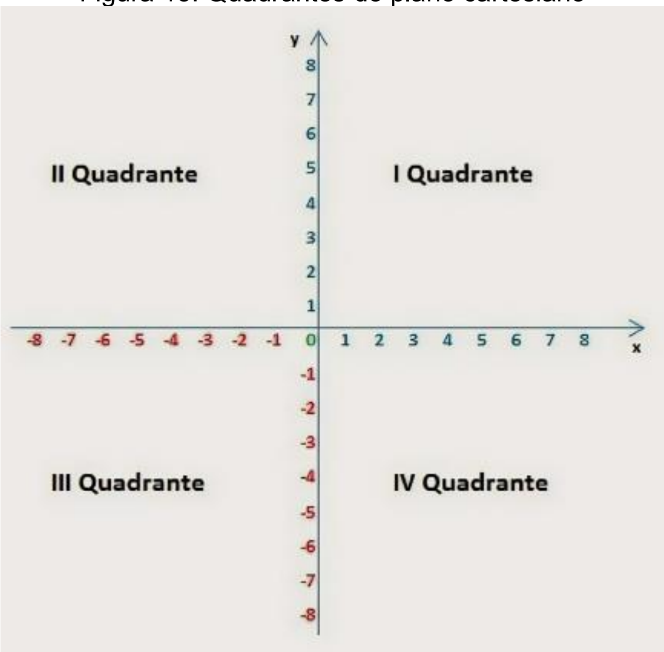
Questão 04 sobre Função Afim: (Unip-SP) Admitindo que em uma determinada localidade uma empresa de táxi cobra R$ 2,00 a bandeirada e R$ 2,00 por quilômetro rodado, e outra empresa cobra R$ 3,00 por quilômetro rodado e não cobra bandeirada, determine o número de quilômetros rodados num táxi da empresa que não isenta a bandeirada, sabendo que o preço da corrida apresentado é de R$ 30,00.

A) 10 km
B) 18 km
C) 6 km
D) 14 km
E) 22 km

Passaremos nos grupos para saber como eles estão tentando como resolver a questão e em seguida a resolveremos no quadro. Depois, entregaremos uma folha quadriculada e pediremos para que os alunos façam um gráfico com as informações encontradas na atividade. Daremos um tempo de 5 min para que eles possam fazer o gráfico, em seguida iremos utilizar o geogebra para mostrar para eles como que se monta um gráfico no plano cartesiano e iremos definir o que é gráfico.

Mostraremos que o plano cartesiano é dividido em 4 quadrantes e que o eixo x é conhecido como eixo das abscissas e o eixo y como eixo das ordenadas.

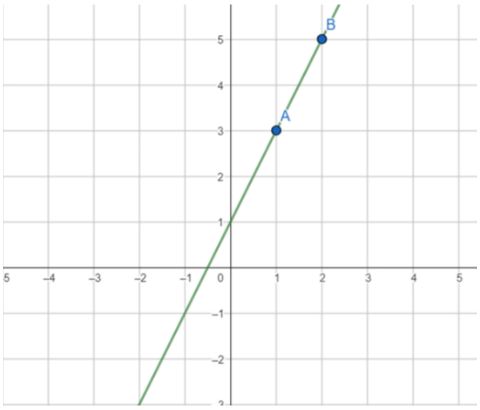
Figura 15: Quadrantes do plano cartesiano



Fonte 4: BLOGSPOT. Disponível em: https://4.bp.blogspot.com/-pLWMA5sG25w/VS5uxVQu-bI/AAAAAAAABYM/HojZQCsOUOw/s. Acesso em 29 nov. 2023.

O **gráfico** de uma função afim é uma reta não perpendicular e não paralela ao eixo x. Assim, para traçar o gráfico de uma função afim é suficiente definir apenas dois pontos.

Ex: $f(x) = 2x + 1$



Como o gráfico de uma função afim é uma reta, o coeficiente **a** de x é também chamado de coeficiente angular. Esse valor representa a inclinação da reta em relação ao eixo Ox.

O termo constante **b** é chamado de coeficiente linear e representa o ponto onde a reta corta o eixo Oy.

Pediremos para que eles façam o gráfico da experiência utilizando a tabela que eles preencheram e da questão resolvida. Enquanto eles montam o gráfico passaremos nas mesas para ver se eles estão conseguindo fazer. Depois que todos conseguirem montar o gráfico, os questionaremos se eles sabem qual é e se há diferença entre função e equação.

Para isso, vamos fornecer folhas de papel quadriculado para tornar o processo de esboço do gráfico mais rápido.

Solicitaremos também que os alunos realizem a representação gráfica das seguintes funções:

$$f(x) = 1x + 2$$

$$f(x) = 2x - 1$$

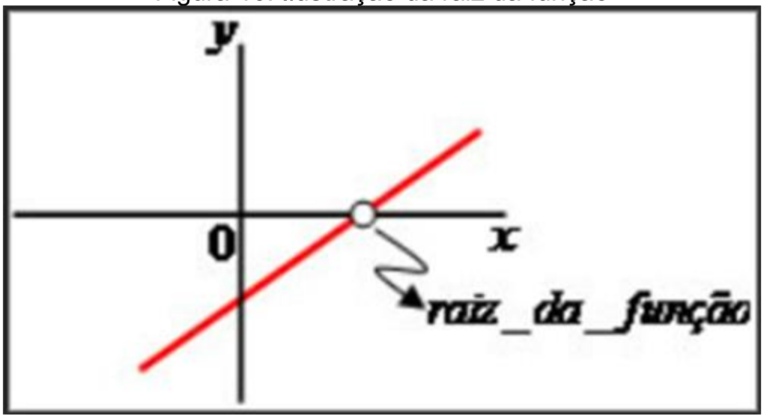
$$f(x) = -2x + 1$$

Após isso, mostraremos as representações destas utilizando o geogebra e discutiremos com os alunos sobre como cada um dos coeficientes influenciam na representação gráfica dessas funções.

Depois de falarmos sobre as definições, explicaremos sobre o que é e como encontrar a raiz de uma função.

Dada uma função y=f(x), o valore de x para o qual f(x)=0 é chamado **raiz** da função. No gráfico cartesiano, a raiz é abscissa do ponto onde o gráfico corta o eixo horizontal.

Figura 16: Ilustração da raiz da função



Fonte: BRASILESCOLA. Disponível em: https://s1.static.brasilescola.uol.com.br/be/e/Untitled-5(25).jpg. Acesso em: 29 nov. 2023.

Para encontrar a raiz, basta substituir o valor de y por 0 na equação da função afim:

$$F(x) = ax + b$$

$$0 = ax + b$$

$$ax = -b$$

$$x = -b/a$$

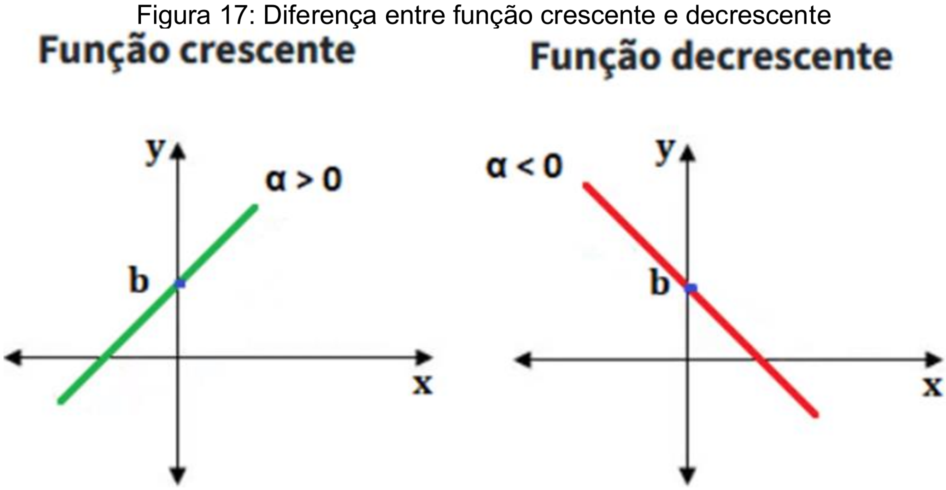
Exercício: Encontrar a raiz da função: $f(x) = 4x - 8$

Após a resolução do exercício vamos mostrar que uma função afim pode ser crescente ou decrescente:

Crescente: seu coeficiente angular é positivo, sendo assim $\alpha > 0$. Nas funções crescentes quando aumentamos os valores de x, os valores correspondentes a y também aumentam.

Decrescente: seu coeficiente angular é negativo, sendo assim $\alpha < 0$. Nas funções decrescentes, quando aumentamos os valores de x, os valores correspondentes a y diminuem.

Figura 17: Diferença entre função crescente e decrescente



Fonte: https://blogger.googleusercontent.com/img/b/R29vZ2xl/AVvXsEglhMAzMGMUb6W854IvmLvbEL0o96sikzvX5x67gYQhFEt3_C_MAiMXJVbVG9zzn2Qwo3HQPydMHc-_EWTLuEBPxsBR4WhJfXuX3kTs1kvCaoE1jOhtXkCrr8xw_BnGIrdJu1UCTqX5Z4VUHqXOkPC4pbO9h4oecA5CfJbNgcdohZjoBMCnjuXoIpQ_/s440/funcao-afim-grau-1.png

Em seguida, apresentaremos outros tipos de funções: a função constante, função identidade e função linear:

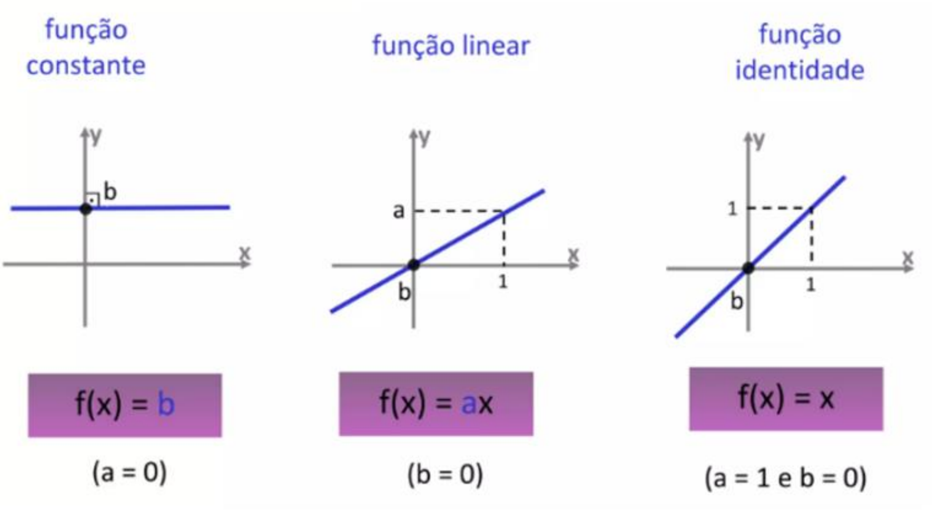
Função constante: Uma função constante é uma função matemática em que o valor da imagem é sempre o mesmo, independentemente do valor da variável independente. Ocorre quando a=b e b=0, a função afim se torna uma função constante.

Função identidade: Ocorre quando o valor de b é 0 e o valor de a é 1, ou seja, é representada por:

A função identidade possui a imagem de cada elemento como o próprio elemento.

Função linear: Uma função é considerada linear quando seu coeficiente angular é diferente de zero. Nesse caso, sua representação gráfica é uma reta que passa pela origem. Nesse caso na representação algébrica o a será igual a 0, portanto será da forma:

Figura 18: Casos especiais de funções afim

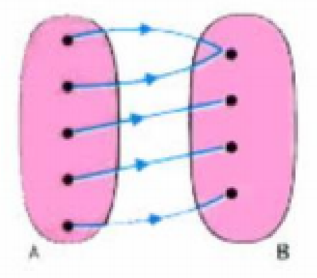


Fonte: PLANEJATIVO. Disponível em: https://static.planejativo.com/uploads/images/2023/03/6nXniWveVF2Vtbu3.png. Acesso em 29 nov. 2023.

Explicaremos em seguida sobre as definições de função sobrejetora, injetora e bijetora:

Figura 19: Definição de função sobrejetora

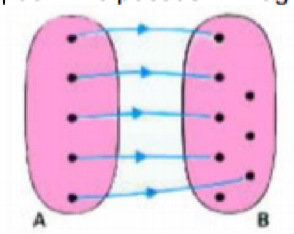
Função sobrejetora: Uma função f de A em B é sobrejetora se, e somente se, para todo y pertencente a B existe um elemento x pertencente a A tal que $f(x) = y$



Fonte: Disponível em: https://pt-static.z-dn.net/files/d88/9448de3c304058350a6e18ee6efea8cf.jpg. Acesso em 29 nov. 2023.

Figura 20: Definição de função injetora

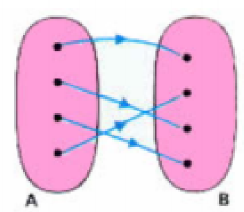
Função injetora: Uma função f de A em B é injetora se, e somente se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de A, se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$, ou seja, todos elementos do domínio possuem imagens diferentes.



Fonte: Disponível em: https://pt-static.z-dn.net/files/d88/9448de3c304058350a6e18ee6efea8cf.jpg. Acesso em: 29 nov. 2023.

Figura 21: Definição de função bijetora

Função bijetora: Uma função é considerada bijetora, se for sobrejetora e injetora ao mesmo tempo.



- Essa função é injetora, pois elementos de B são "flechados" só uma vez.
- Essa função é sobrejetora, pois não existem elementos sobrando em B.
- A função é **bijetora**, pois é injetora e sobrejetora.

Fonte: Disponível em: https://pt-static.z-dn.net/files/d88/9448de3c304058350a6e18ee6efea8cf.jpg. Acesso em: 29 nov. 2023.

Depois de falar sobre os tipos de funções pediremos para que façam os exercícios que estão na apostila entregue no início da aula. Enquanto eles resolvem passaremos nas mesas tirando as possíveis dúvidas dos alunos em relação as atividades.

9.2. Material Entregue

APOSTILA

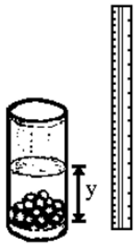
FUNÇÃO AFIM

Experimento:

Água, copo e bolinhas

A ideia para este experimento foi retirada de <http://penta.ufrgs.br/edu/telelab/mundo_mat/cfuncao/exp3.htm> e de http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/model.html, venho trabalhando com ela há 12 anos na UNIOESTE, cada ano adaptando esta atividade. Andréia Büttner Ciani.

O nível da água no copo cilíndrico (em centímetros) e o volume (em mililitros) variam de acordo com o número de bolinhas de gude que colocamos dentro do copo. As bolinhas utilizadas devem ser todas do mesmo tamanho.



Vamos considerar colocar água no copo (tubo) no nível de 80 mL para iniciar o experimento.

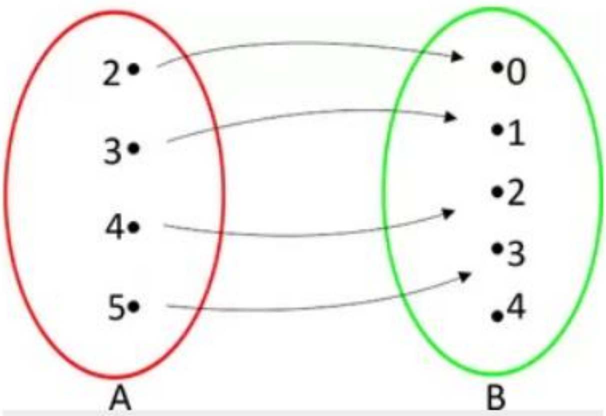
x - A quantidade de bolinhas como a variável independente, medida em unidades.

y - O nível de água como variável dependente, medido em centímetros, com uma régua.

1) Inserir as bolinhas e anotar os valores medidos com a régua em centímetros.

x unidades	**y = f(x) centímetros**
0	
1	
2	
3	
4	

Função é a expressão que estabelece relação entre y (variável dependente) e x (variável independente). os valores de y variam dependendo do valor atribuído a x.
Consideramos dois conjuntos:
A= {a, b, c, d}; B= {e, f, g, h, i}, uma relação f de A em B, será considerada uma função se todo elemento do conjunto A se relaciona com apenas um elemento do conjunto B.
Exemplo:
Se A= {2, 3, 4, 5} e B= {0, 1, 2, 3, 4}
A relação $f(x) = x - 2$ é função, pois todo elemento do conjunto A se relaciona com um único elemento do conjunto B. Veja:
$f(2) = 0$
$f(3) = 1$
$f(4) = 2$
$f(5) = 3$



Podemos representar essa função por:

$f: A \to B$
$x \to x - 2$

Domínio: É o conjunto de saída, compostos no elemento x aplicados na função, na notação f:A→B , o domínio é representado pela letra antes da seta;

Contradomínio: É o conjunto de chegada, na notação f:A→B é representado pelo lado direito da seta;

Imagem: É um subconjunto do contradomínio, ele é formado pelos elementos Y que saem da função de e chegam ao contradomínio, podendo ter o mesmo número de elementos ou menos.

A **lei de formação** é o que define como a função deve ser representada, a **função afim** é expressa por $y = ax + b$, onde a e b pertencem ao conjunto dos reais e a é diferente de 0.
O coeficiente a da função $f(x) = ax + b$ é denominado coeficiente angular da reta representada no plano cartesiano.
O coeficiente b é denominado coeficiente linear.
Por exemplo na função $y = 2x + 1$ o coeficiente angular é 2 e o coeficiente linear é 1.

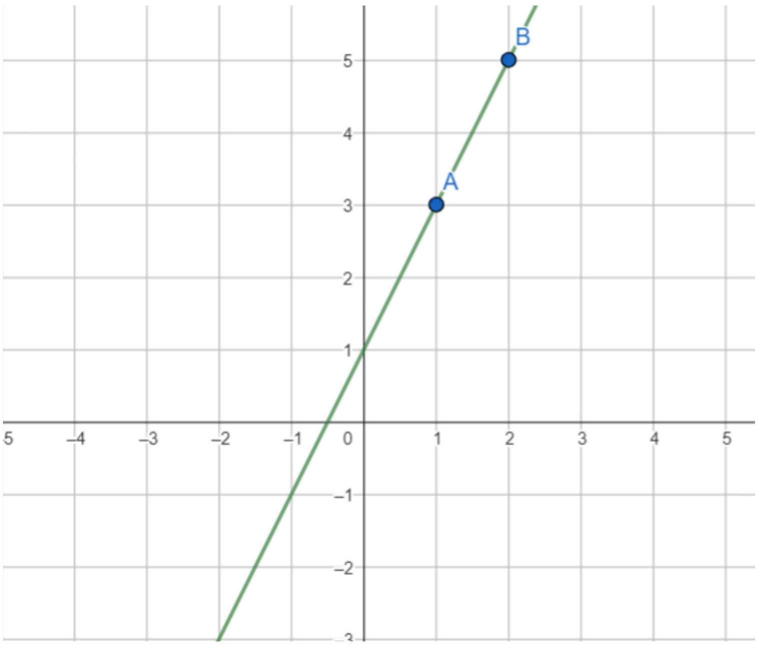
Exercício:

Questão 04 sobre Função Afim: (Unip-SP) Admitindo que em uma determinada localidade uma empresa de táxi cobra R$ 2,00 a bandeirada e R$ 2,00 por quilômetro rodado, e outra empresa cobra R$ 3,00 por quilômetro rodado e não cobra bandeirada, determine o número de quilômetros rodados num táxi da empresa que não isenta a bandeirada, sabendo que o preço da corrida apresentado é de R$ 30,00.

A) 10 km
B) 18 km
C) 6 km
D) 14 km
E) 22 km

O **gráfico** de uma função afim é uma reta não perpendicular e não paralela ao eixo x. Assim, para traçar o gráfico de uma função afim é suficiente definir apenas dois pontos.

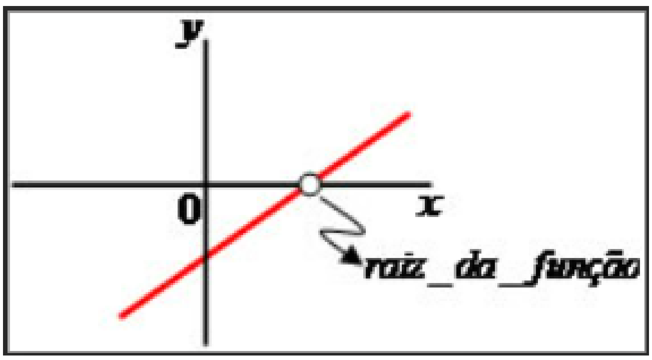
Ex: $f(x) = 2x + 1$



Esboce o gráfico das funções:

- $f(x) = 1x + 2$
- $f(x) = 2x - 1$
- $f(x) = -2x + 1$

Dada uma função y=f(x), o valore de x para o qual f(x)=0 é chamado **raiz** da função. No gráfico cartesiano, a raiz é abscissa do ponto onde o gráfico corta o eixo horizontal.

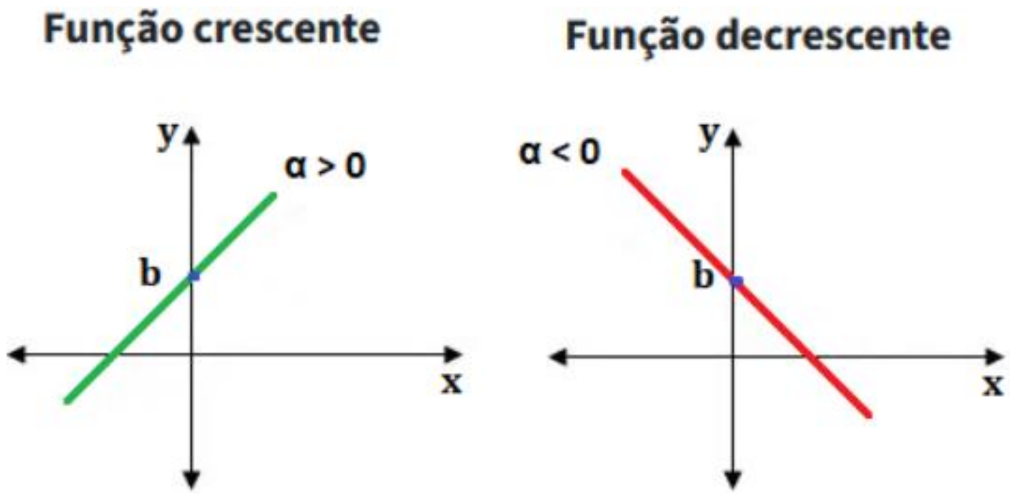


Para encontrar a raiz, basta substituir o valor de y por 0 na equação da função afim:

$$y = ax + b$$
$$0 = ax + b$$
$$ax = -b$$
$$x = -\frac{b}{a}$$

Exercício: Encontrar a raiz da função: $f(x) = 4x - 8$

A função afim pode ser crescente ou decrescente:
Crescente: seu coeficiente angular é positivo, sendo assim $\alpha > 0$**.** Nas funções crescentes quando aumentamos os valores de x, os valores correspondentes a y também aumentam.
Decrescente: seu coeficiente angular é negativo, sendo assim $\alpha < 0$. Nas funções decrescentes, quando aumentamos os valores de x, os valores correspondentes a y diminuem.



Função constante: Uma função constante é uma função matemática em que o valor da imagem é sempre o mesmo, independentemente do valor da variável independente. Ocorre quando a=b e b=0, a função afim se torna uma função constante.

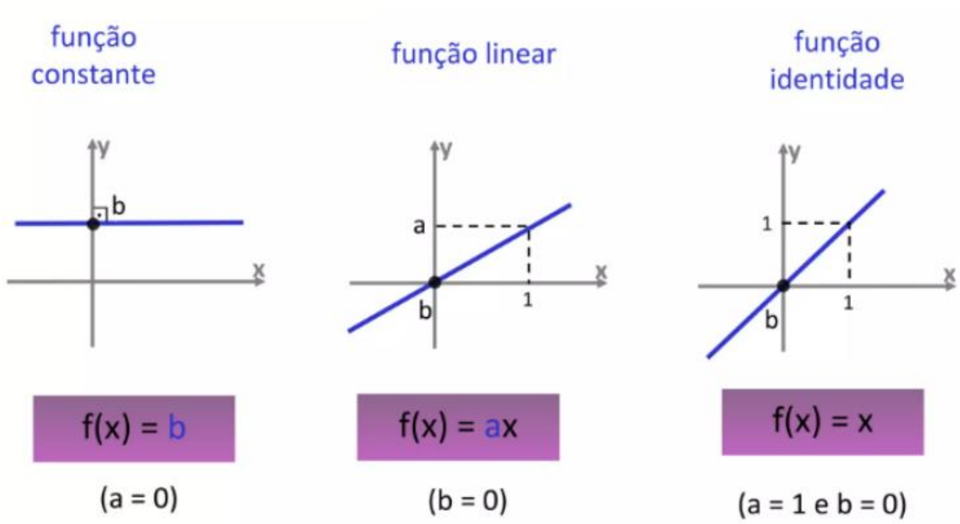
Função identidade: Ocorre quando o valor de b é 0 e o valor de a é 1, ou seja, é representada por:

$$\boldsymbol{F(x) = x}$$

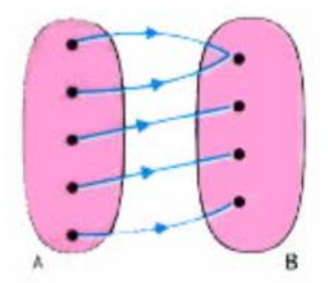
A função identidade possui a imagem de cada elemento como o próprio elemento.

Função linear: Uma função é considerada linear quando seu coeficiente angular é diferente de zero. Nesse caso, sua representação gráfica é uma reta que passa pela origem. Nesse caso na representação algébrica o a será igual a 0, portanto será da forma:

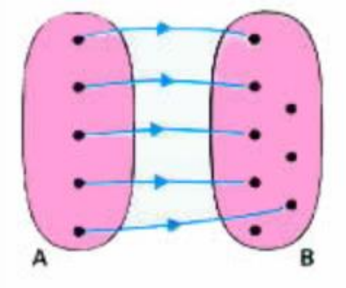
$$\boldsymbol{F(x) = ax}$$



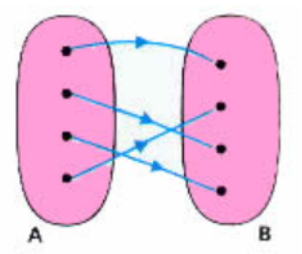
Função sobrejetora: Uma função f de A em B é sobrejetora se, e somente se, para todo y pertencente a B existe um elemento x pertencente a A tal que $f(x) = y$



Função injetora: Uma função f de A em B é injetora se, e somente se, quaisquer que sejam x_1 e x_2 de A, se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$, ou seja, todos elementos do domínio possuem imagens diferentes.



Função bijetora: Uma função é considerada bijetora, se for sobrejetora e injetora ao mesmo tempo.



- Essa função é injetora, pois elementos de B são “flechados” só uma vez.
- Essa função é sobrejetora, pois não existem elementos sobrando em B.
- A função é **bijetora**, pois é injetora e sobrejetora.

Exercícios:

1- Determine o valor do coeficiente angular e do coeficiente linear de cada uma das retas abaixo:

a) $y = 2 - 3x$

b) $y = 2(3x - 4)$

c) $y = (2x + 1)/2$

d) $3x + 4y = 1$

2-

(UFSM) Sabe-se que o preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, que é denominada bandeirada, e uma parcela variável, que é função da distância percorrida. Se o preço da bandeirada é de R$ 4,60 e o quilômetro rodado é R$ 0,96, a distância percorrida pelo passageiro que pagou R$ 19 para ir de sua casa ao shopping é de:

A) 5 km

B) 10 km

C) 15 km

D) 20 km

E) 25 km

3- O dono de uma loja de moda praia teve uma despesa de R$ 950,00 na compra de um novo modelo de biquíni. Ele pretende vender cada peça deste biquíni por R$ 50,00. A partir de quantas peças vendidas ele passará a ter lucro?

4- O gráfico da função f(x) = 3x + 5 não passa por um dos quadrantes do plano cartesiano. Esse quadrante é:

a. **I**
b. **II**
c. **III**
d. **IV**

9.3. Lista de Exercícios

Atividades Função Afim

1) Dada a função **y = 4 - 3x**, responda:

a) A função é A fim ou linear? Afim. Uma função linear é uma função em que o coeficiente linear é zero.

b) A função é crescente ou decrescente? Decrescente, pois o coeficiente angular (número que multiplica) é negativo.

c) Em que valor, a função corta o eixo y? A função corta o eixo y quando o valor de x é igual a zero. Portanto, substituímos o valor de x pôr zero na lei de formação e resolvemos a equação em y:

4 – 0 = y --> y = 4

d) Calcule os valores de y utilizando os valores de x da tabela abaixo e construa o gráfico desta função.

x	y
-1	......7.......
0	......4........
2	......-2.......

Para preencher a tabela, devemos substituir na lei de formação pelos valores indicados. Efetuando as contas, acharemos o valor respectivo para cada substituição. Primeiramente, para completar a primeira linha, vamos substituir x por -1:

$$Y = 4 - 3x(-1)$$

$$Y = 4 + 3$$

$$Y = 7$$

Para a segunda linha, substituímos x por 0:

$$Y = 4 - 3x0$$

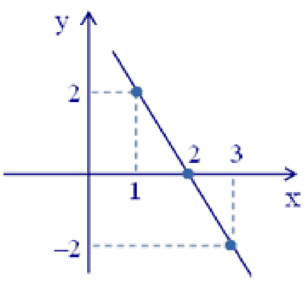
$$Y = 4$$

Por fim, substituímos x por 2:

$$Y = 4 - 3x2$$

$$Y = -2$$

2) Qual função representa o gráfico abaixo:



a) y = 2x

b) y = 3x + 2

c) y=   - 2x + 4

d) y = - 2x + 2

A maneira mais simples de resolver esse problema é perceber que, ao aumentar uma unidade em x, o valor de y decresce duas unidades. Sendo assim, o coeficiente angular da função é igual a -2. Sabendo dessa informação e que o gráfico passa pelo ponto (2,0), podemos descobrir o valor do coeficiente linear substituindo x por 2 e y por 0:

$$Y = ax + B$$

$$0 = -2x2 + B$$

$$B - 4 = 0$$

$$B = 4$$

Logo, a opção correta é a letra c.

3) (QUADRIX Adaptada) Uma fábrica produz livros por lotes. Ao fazer uma análise minuciosa, o gerente dessa fábrica percebeu que o lucro dependia da quantidade de livros produzidos por lote, já que o aumento da produção indicava um gasto maior de materiais, e os livros fabricados a mais nem sempre eram vendidos. Leve-se em conta que a equação que fornece o lucro líquido em reais, *L*, em função da quantidade produzida por lote, x, é dada por $L(x) = -x\ 2 + 100x$. Com base nessa situação hipotética, julgue o item abaixo.
Se o lucro líquido for igual a zero, então é obrigatório que o número de livros produzido por lote também seja igual a zero. Estaria correta essa suposição?

Essa questão já aborda um pouco dos conceitos de função de 2° grau. Se o lucro é igual a zero, temos que a nossa expressão em x é igual a zero:

$$0 = -x^2 + 100x$$

A qual se torna uma equação de segundo grau em x. Podemos resolvê-la por qualquer método que nos convier: pela fórmula resolutiva (Bhaskara), por soma e produto, por completar quadrados etc. Uma outra forma ainda é colocar o x em evidência (por ser um fator comum entre os dois termos) e obtermos:

$$x(-x+100) = 0$$

Quando o produto de dois números for zero, isso significa que um deles precisa ser zero. Logo,

$$(-x+100) = 0$$

$$-x = -100$$

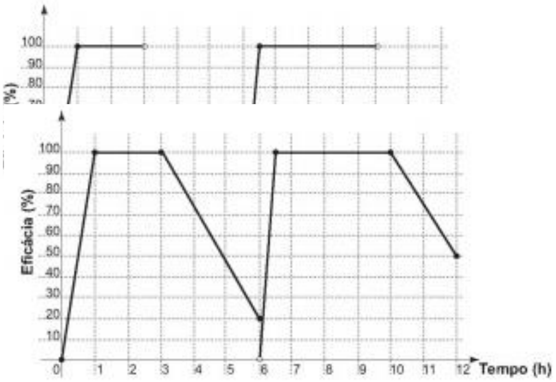
$$x = 100$$

Ou

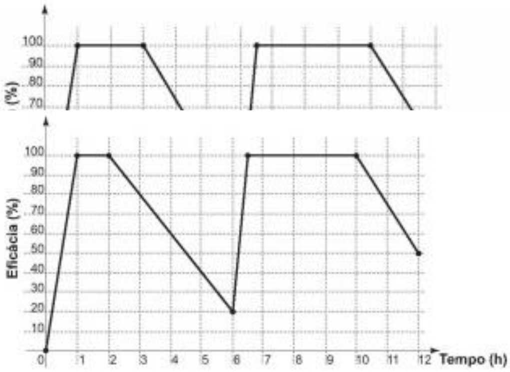
$$x = 0$$

Com isso, podemos afirmar que 0 e 100 são as duas raízes da equação. Se não forem produzidos nenhum livro, o lucro é igual a zero. Entretanto, se forem produzidos exatamente 100 livros, o lucro líquido também será zero. Portanto, a afirmação feita no enunciado é falsa.

4)(ENEM 2016) Uma empresa farmacêutica fez um estudo da eficácia (em porcentagem) de um medicamento durante 12 h de tratamento em um paciente. O medicamento foi administrado em duas doses, com espaçamento de 6 h entre elas. Assim que foi administrada a primeira dose, a eficácia do remédio cresceu linearmente durante 1 h, até atingir a máxima eficácia (100%), e permaneceu em máxima eficácia durante 2h. Após essas 2h em que a eficácia foi máxima, ela passou a diminuir linearmente, atingindo 20% de eficácia ao completar as 6 h iniciais de análise. Nesse momento, foi administrada a segunda dose, que passou a aumentar linearmente, atingindo a máxima eficácia após 0,5 h e permanecendo em 100% por 3,5h. Nas horas restantes da análise, a eficácia decresceu linearmente, atingindo ao final do tratamento 50% de eficácia. Considerando as grandezas tempo (em hora), no eixo das abscissas; e eficácia do medicamento (em porcentagem), no eixo das ordenadas, qual é o gráfico que representa tal estudo?



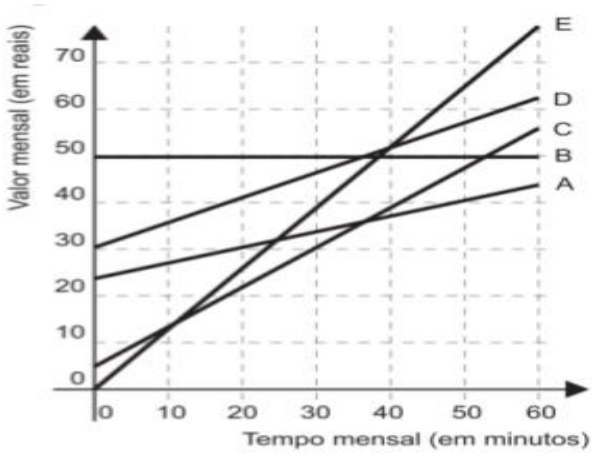
Quand
diminu
remédi
Saben
narrad
direito).



ou
ácia do
nha reta.
senta o
superior

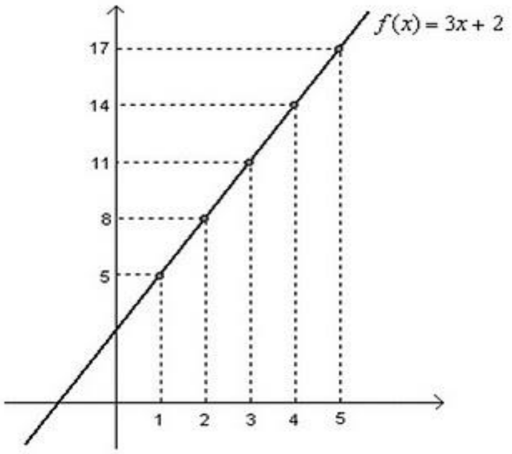
5) No Brasil há várias operadoras e planos de telefonia celular. Uma pessoa recebeu 5 propostas (A, B, C, D e E) de planos telefônicos. O valor mensal de cada plano está em função do tempo mensal das chamadas, conforme o gráfico.

Essa pessoa pretende gastar exatamente R$ 30,00 por mês com telefone. Dos planos telefônicos apresentados, qual é o mais vantajoso, em tempo de chamada, para o gasto previsto para essa pessoa?



Para fazer essa análise, vamos ver quantos minutos podemos falar ao telefone com 30 reais para cada uma das propostas. Para o plano A, se falarmos cerca de 20 minutos no telefone, já estaremos pagando 30 reais. No plano B, pagamos 50 reais independentemente do tempo de uso. No plano C, podemos falar 30 minutos no telefone e pagaremos 30 reais. No plano D, pagamos 30 reais mesmo sem utilizar o serviço. No plano E, falar um pouco mais de 20 minutos no celular já nos faz ter um gasto de 30 reais. Com essa análise, podemos ver que o plano C é o que nos fornece mais tempo de uso pelo preço de 30 reais, se tornando o mais vantajoso.

6) Um vendedor tem seu salário diário calculado da seguinte maneira: ele ganha um valor fixo de R$ 2,00, mais uma comissão de R$ 3,00 para cada produto vendido. Com estas informações, o gráfico que mostra a relação entre salário e o número de produtos vendidos é representado abaixo: Com base nesta função, representada pelo gráfico, responda:



a) A função é crescente ou decrescente? Crescente

b) Qual o valor do salário diário do vendedor caso não venda nenhum produto? 2 reais

c) Se vender 6 produtos, quanto ele ganha de salário diário?
3x6 + 2 = 20

d) Quais as coordenadas de quatro pontos visíveis nesta função?

(1,5), (2,8), (3,11) e (4,14)

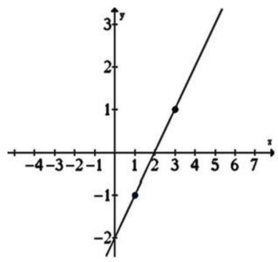
7) Indique a fórmula de cada função representada pelo gráfico:

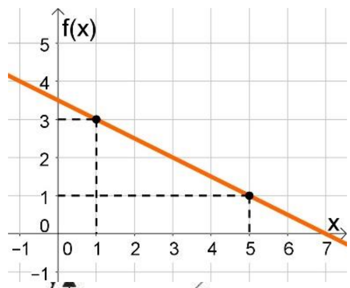
A) $y = \frac{x}{2} - 1$

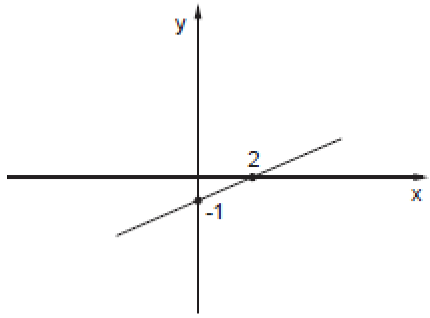
B) $y = -\frac{x}{2} + 3,5$

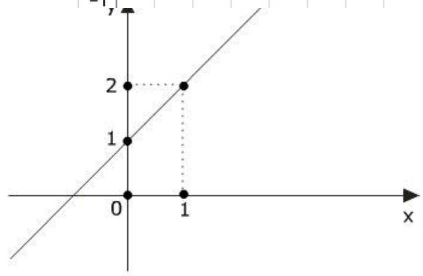
C) y = x - 2

D) y = 1 + x









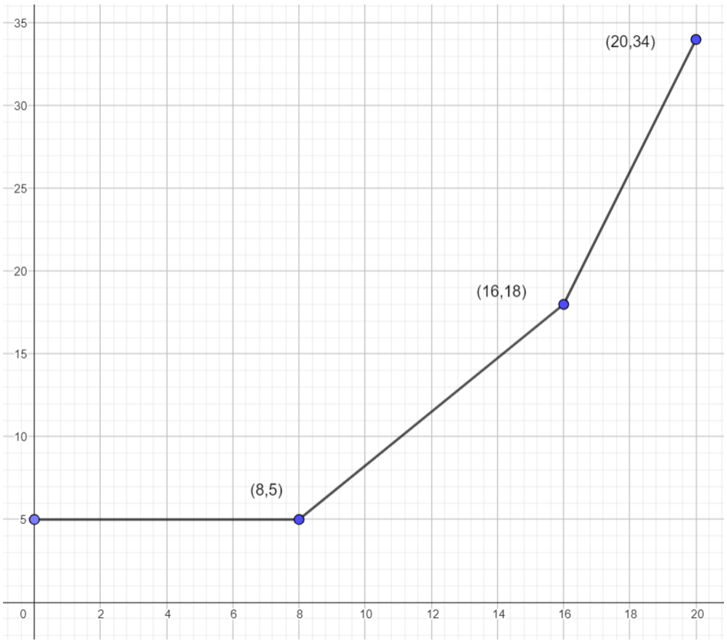
Aqui, vamos associar cada gráfico a uma lei de formação. O primeiro gráfico (canto superior esquerdo) é crescente, logo seu coeficiente angular é positivo. Ele corta o eixo y em um ponto negativo, logo, seu coef. linear é negativo. Sendo assim, ele só poderia corresponder à letra A ou à letra C. Pelo gráfico, quando é igual a zero, é igual a . A lei de formação que se adequa a esse ponto é a da letra C.

O segundo gráfico (canto superior direito) é o único que possui um coef. angular negativo, pois é decrescente. Sendo assim, ele corresponde à lei de formação presente na letra B.

O terceiro gráfico (canto inferior esquerdo) corta o eixo no . Portanto, esse é o seu coeficiente linear. Com isso, podemos afirmar que ele se relaciona com a alternativa A.

O quarto e último gráfico corta o eixo no 1. Portanto, sua lei de formação é a da alternativa D, em que o coeficiente linear é igual a 1.

8) (PUCCAMP-SP) (adaptada) O gráfico abaixo mostra a relação entre o valor da conta de água e o volume de água consumido em determinada residência. O eixo x representa o consumo em m³ e o eixo y representa o valor total da conta de água em reais.



Qual será o valor da conta quando o consumo for de 18 m³?

Aqui, precisamos achar a lei de formação da função de primeiro grau que passa pelos pontos (16,18) e (20,34). Vamos achar os valores de a e b coeficientes da nossa função

$$Y = ax + b$$

Se nossa função passa por (16,18), podemos afirmar que, quando x é igual a 16, y é igual a 18. Sendo assim, podemos substituir esses valores simultaneamente na lei de formação para obter:

$$18 = 16a + b$$

De maneira análoga, usamos o ponto (20,34) para obter a equação:

$$20a+b = 34$$

Com as duas equações, podemos montar um sistema:

$$16a + b = 18$$
$$20a + b = 34$$

Resolvendo-o pelo método da adição:

$$(-16a - b) + (20a + b) = (-18) + (34)$$
$$4a = 16$$
$$a = 4$$

Agora, achamos b substituindo o valor de a em qualquer uma das duas equações do sistema:

$$16x4 + b = 18$$
$$64 + b = 18$$
$$b = -46$$

Logo, nossa função é dada por $y = 4x - 46$. Para descobrir o consumo de 18 m³, substituímos o valor de x por 18 e calculamos seu respectivo y:

$$y = 4x18 - 46$$
$$y = 26$$

Logo, a conta será de 26 reais.

9) Dê a lei de formação de duas funções de 1° grau que passem pelo ponto $(3{,}4)$

3x + 1 e 2x - 2

10) Sua avó acabou de completar 62 anos e agora pode (finalmente) se aposentar. No dia seguinte, ela vai ao INSS para saber mais informações sobre a aposentadoria e, quando retorna, te explica o que aconteceu: “Você pode me ajudar com as contas, meu neto? A vó não é muito boa com números. O pessoal lá disse que, se eu me aposentar agora, vou ter direito de receber 1500 reais, mas esse valor não vai mudar nunca. Se eu trabalhar por mais 7 anos, vou conseguir me aposentar ganhando 2100 reais. Qual opção será que é mais vantagem?” Aqui, considere apenas o dinheiro acumulado com a aposentadoria, ou seja, desconsidere o salário que sua avó ganharia trabalhando nesses 7 anos.

Nos primeiros 7 anos, é logicamente mais vantajoso pegar a aposentadoria de 1500 reais, pois assim a avó pelo menos está recebendo algo de aposentadoria. Entretanto, a partir de um certo ponto no tempo, o dinheiro acumulado pelo segundo tipo de aposentadoria supera o acumulado do primeiro e se torna mais vantajoso. Vamos descobrir que instante é esse: vamos chamar de y a função afim que nos dá o valor acumulado com a aposentadoria de 1500 reais. Podemos ver que sua lei de formação é:

$$y = 1500x$$

Em que x é o tempo dado em meses.

Agora, podemos achar a função que nos dá o valor acumulado pela aposentadoria de 2100 reais em função dos meses decorridos. Sabemos que, daqui há 85 meses (7 anos e 1 mês) teremos um total de 2100 reais acumulados. Também sabemos que daqui há 86 meses teremos 4200 reais. Sendo assim, podemos achar qual é a função afim que passa pelos pontos (85,2100) e (86,4200). O coeficiente angular dessa função deve ser a = 2100, visto que, para um aumento de 1 unidade em x, o valor da função aumenta 2100 unidades. Para achar b (coeficiente linear) dessa função Y:

$$Y = 2100 + b$$

Podemos substituir Y por 2100 e x por 85 simultaneamente para obter:

$$2100 = 2100(85) + b$$
$$2100 = 178500 + b$$
$$b = -176400$$

Logo, a função Y que nos dá o valor acumulado pela aposentadoria de 2100 reais é dada por

$$Y = 2100x - 176400$$

Perceba que essa função só faz sentido para x>=84 meses, pois, para valores menores que esse, a função nos retorna valores negativos, sendo que não faz sentido no nosso problema a avó receber um valor negativo de aposentadoria. Agora, estamos interessados em descobrir quantos meses são necessários para que o valor acumulado pela aposentadoria de 2100 reais supere a outra. Para descobrir exatamente em que ponto no tempo isso ocorre, nós igualamos as duas funções:

$$Y = y$$
$$2100x - 176400 = 1500x$$

Ao fazer isso, acharemos qual é o valor de x no ponto em que as duas retas se tocam.

$$2100x - 1500x = 176400$$
$$600x = 176400$$
$$x = 294$$

Logo, a segunda opção só será mais vantajosa daqui há 294 meses, ou seja, 24 anos e meio.

11) Existem vários softwares que permitem a visualização de gráficos de funções diversas. Dois muito bons e muito utilizados são o Geogebra (usado na questão 1) e o Demos, ambos gratuitos e disponíveis sem necessidade de download. Além de usar os softwares para a sua finalidade original, a comunidade desses sites os utiliza para criar diversas artes, tais como:

Para criá-las, os autores fornecem uma função para o programa e restringem o domínio da função. Por exemplo, se quisermos traçar uma linha entre os pontos $(0,0)$ e $(1,2)$, podemos digitar a função $y = 2x$ no programa (reta que passa por esses dois pontos) e restringir o domínio da função para $0 \leq x \leq 1$. Levando isso em consideração, como poderíamos desenhar um triângulo equilátero nesses softwares? Se possível, utilize um dos softwares mostrados para desenhar o triângulo.

Há infinitas possibilidades para desenharmos um triângulo equilátero qualquer.

9.4. Referências

BRASIL ESCOLA. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcao-de-primeiro-grau.htm. Acesso em 18 dez. 2023.

PLANEJATIVO. Disponível em: https://app.planejativo.com/estudar/347/resumo/matematica-funcao-constante-e-funcao-afim. Acesso em 18 dez. 2023.

9.5. Relatório Aula 5

Na aula, estavam presentes 12 alunos. Começamos tirando as dúvidas dos alunos na lista que foi entregue no sábado passado, corrigimos as questões 5,7,8, e em seguida pedimos para eles formarem trios para realizar a experiência. Eles apresentaram um pouco de dificuldades para encontrar a lei de formação, pois as medidas das bolinhas não eram tão precisas. Um dos grupos arredondou o valor para encontrar uma lei de formação mais precisa. Quando perguntamos sobre a diferença entre função e equação, alguns deles compartilharam a sua ideia com a turma. Quando falamos sobre o gráfico, uma aluna nos questionou o que faríamos caso não tivéssemos acesso ao Geogebra. Nesse caso, solicitamos que eles desenhassem o gráfico do exercício na folha quadriculada que entregamos. Os alunos conseguiram traçar o gráfico pedido (alguns na folha e outros pelo Geogebra). Continuamos a usar o software para mostrar aos alunos quais as características de um gráfico linear, constante e da função identidade.

Ao voltar do intervalo, voltamos para as definições de função identidade e constante, em que percebemos que houve um erro de digitação na apostila que foi entregue. Durante nossa explicação, pedimos para que os alunos arrumassem em sua apostila o erro que foi percebido, explicamos sobre as raízes de uma função e falamos quando uma função é sobrejetora, injetora e bijetora. Em seguida passamos alguns exercícios para a turma e auxiliamos eles na solução tirando suas dúvidas.

No decorrer da aula, os alunos foram bastante participativos. Eles estavam um pouco dispersos depois do intervalo, mas, mesmo assim, continuaram prestando atenção na aula. Alguns dos alunos começaram a resolver os exercícios presentes na apostila um pouco antes do planejado, o que ajudou a manter o andamento na aula, pois aqueles que fizeram os exercícios durante a explicação estavam aptos a ajudar aqueles que não estavam conseguindo resolver algum dos problemas propostos. Percebemos que há um grupo que não se enturmou muito com o restante dos alunos e que possui um pouco mais de dificuldades, então buscamos sempre auxiliar eles nas atividades propostas.

10. Encontro 6

10.1. Plano de Aula 21/10/2023

Público-alvo: Alunos do PROMAT

Conteúdos: Função de Segundo Grau

Professores: Fabricio Rustick, Felipe Klumb, Felipe Simão, Milleni Ferreira de Souza

Objetivo geral:

Compreender os conceitos de função de segundo grau por jogos e atividades práticas.

Objetivos específicos:

Encontrar as raízes da função de Segundo Grau

Identificar as variáveis e determinar a lei de formação de uma função de Segundo Grau

Analisar como cada variável altera o gráfico no plano cartesiano

Encontrar o vértice da função

Encaminhamento metodológico:

Antes da aula começar, as mesas da sala já estarão organizadas em grupos de quatro para que seja mais fácil que os alunos formem grupos. Começaremos a aula tirando as dúvidas sobre a lista que foi entregue na aula passada sobre o conteúdo de função afim (15 min). Sequencialmente, será entregue para os alunos uma apostila contendo os conteúdos que iremos trabalhar e algumas questões que iremos resolver durante a aula. Com as folhas entregues, iremos demonstrar como os métodos de resolução de equações de segundo grau foram criados.

Sempre que temos uma equação de 2° grau na forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Podemos escrevê-la na forma

$$a(x - r_1)(x - r_2) = 0$$

Em que r_1 e r_2 são suas raízes. Fazendo a multiplicação distributiva:

$$a(x^2 - r_2x - r_1x + r_1r_2) = 0$$
$$ax^2 - a(r_1 + r_2)x + ar_1r_2 = 0$$

Daqui, concluímos que:

$$b = -a(r_1 + r_2)$$
$$r_1 + r_2 = \frac{-b}{a}$$
$$c = ar_1r_2$$
$$r_1r_2 = \frac{c}{a}$$

(55 minutos)

Sequencialmente, iremos entregar um jogo de dominó feito de equações de segundo grau e suas raízes. Iremos relembrá-los que podem usar os métodos aprendidos em aulas anteriores para descobrirem as raízes das equações.

Vamos esperar o suficiente para os grupos terminem uma rodada, dependendo do horário eles podem até jogar mais rodadas.
(40 minutos)

Regras do Dominó:

- Para saber quem irá iniciar o jogo, será jogado par ou ímpar
- Cada jogador terá 7 cartas, o jogador que for começar escolhe uma de suas cartas
- Se o jogador seguinte possuir as raízes da equação, joga a próxima peça, caso ao contrário, compra no monte e passa a vez
- Ganha o jogo quem "baixar" todas suas cartas primeiro.

Com o jogo terminado, começaremos a falar sobre a definição de uma função de Segundo Grau. Sendo ela:

DEFINIÇÃO:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Uma função de segundo grau é caracterizada pelo x², sem ele não temos uma função de segundo grau. Logo, os coeficientes a, b, c são reais e a é diferente de 0, porém nem sempre os termos bx e c, aparecerão na função, uma vez que b e c podem ser iguais a zero.

Exemplos:

A) $\boldsymbol{F(x) = 3x^2 + 5x - 2} \rightarrow a = 3, b = 5, c = -2$

B) $\boldsymbol{F(x) = -25x^2 + 5} \rightarrow a = -25, b = 0, c = 5$

C) $\boldsymbol{F(x) = 2x^2 - 4x} \rightarrow a = 2, b = 4, c = 0$

D) $\boldsymbol{F(x) = -6x^2} \rightarrow a = -6, b = 0, c = 0$

Em seguida falaremos sobre a representação gráfica da função:

Explicação

O gráfico da função quadrática é sempre uma parábola, ela pode ser traçada quando atribuimos valores para x e calculamos y=f(x), assim determinando então vários pares ordenados. O gráfico possui elementos importantes sendo eles:

- As raízes da função, calculadas pelo x' e x"

- O vértice da parábola, que pode ser encontrado a partir de fórmulas específicas.

$Xv = (-b)/(2.a)$ e $Yv = (-\Delta)/(4.a)$

Onde Δ=b²-4.a.c

Será usado o GeoGebra para monstrar as funções citadas anteriormente e como cada valor dos coeficientes altera o seu gráfico. Quando estivermos fazendo os gráficos das funções, pediremos a eles para tentarem achar suas raízes por qualquer método preferível. Também explicaremos sobre o que acontece com o gráfico da função quando ocorre a troca de sinais dos seus coeficientes.

Explicação:

Quando o coeficiente c é positivo, ele eleva a parábola no eixo y. Se for negativo, faz com que a parabola desça o eixo y.

Quando o coeficiente a da nossa lei de formação é positivo, temos que a parábola está com concavidade para cima. Se a é negativo, a concavidade será voltada para baixo.

Se o coeficiente b for positivo, o gráfico cortará o eixo y de maneira crescente. Se b for negativo, o gráfico estará decrescendo quando cortar o eixo vertical.

Se a parábola está completamente acima ou completamente abaixo do eixo x, seu delta é menor que zero e não haverá raízes reais. Quando delta é igual a 0, haverá apenas uma raiz real, e maior que zero terá duas raizes reais.

(30 minutos)

Após mostrar a interpretação gráfica de uma função de 2° grau, os professores irão mostrar uma demonstração da fórmula resolutiva da equação do 2° grau.

Quando analisamos o gráfico de uma função quadrática com duas raízes reais, vemos que, por conta da existência de uma simetria, as duas raízes r_1 e r_2 podem ser escritas como:

$$r_1 = m - d$$

$$r_2 = m + d$$

Em que m é o ponto médio entre as raízes e d é a distância delas até m. Por soma e produto, sabemos que $r_1 + r_2 = \frac{-b}{a}$ e $r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$. Daqui, podemos escrever m e d com base nos três coeficientes:

$$r_1 + r_2 = (m - d) + (m + d) = 2m = \frac{-b}{a} \Leftrightarrow m = \frac{-b}{2a}$$

$$r_1 \cdot r_2 = (m-d)(m+d) = m^2 - d^2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow d^2 = m^2 - \frac{c}{a}$$

Com base em substituições, escrevemos ambas as raízes completamente em termos de a, b e c e obtemos a fórmula resolutiva.

Quando tirarmos todas as dúvidas sobre como o gráfico de uma função de segundo grau funciona, mostraremos como calcular a vértice da parábola e como encontrar o ponto de interseção da parábola com o eixo y.

Explicação:

Vértice:

O vértice da parabola é o ponto V(Xv,Yv) onde a curva muda o sentido, crescente quando é côncava para cima ou se torna decrescente quando é côncava para baixo.

Podemos encontrar as coordenadas desse ponto pela seguinte maneira

$Xv = \frac{-b}{2.a}$ e $Yv = \frac{-\Delta}{4.a}$

Onde $\Delta = b^2 - 4.a.c$

- E para a intercepção no eixo y basta calcular y=f(0), ou seja, substituir x por 0 e calcular o valor de y correspondente.

Exemplo:

Encontre o vértice da parábola e o ponto de interseção no eixo y em $f(x) = -x^2 + 4x - 3$. Se

$$a = -1 \quad b = 4 \quad c = -3$$

Calculando o Δ e aplicando a fórmula de resolutiva de segundo grau, temos que:

$$\Delta = 4^2 - 4(-1)\,(-3)$$

$\Delta = 16 - 12 \qquad \Delta = 4$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$$
$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-4}{4(-1)} = \frac{-4}{-4} = 1$$

Para isto basta calcular $f\ (0)$

$$f(x)\ = -x^2\ + 4x - \ 3$$

$$f(0)\ =\ (-1).0^2\ +\ 4.0 -\ 3\ =\ -3$$

(10 minutos)

Com todo o conteúdo explicado, entregaremos a todos os grupos um jogo matemático MICO, que contém todo o conteúdo explorado até agora.

(1h:20 minutos)

Regras do Jogo do Mico

- Embaralhe as cartas e as distribua entre os jogadores;
- Cada jogador deve formar pares com as cartas que tiver em mãos e colocá-los sobre a mesa;
- O restante das cartas fica em mãos e o primeiro jogador começa puxando -uma carta do jogador à sua esquerda;
- Se formar um par, ele deve baixá-lo em seu monte;
- Se não formar um par, o jogador acumula essa carta com as outras que já tem em mãos;
- O jogo acaba quando todos os pares estiverem formados e um dos jogadores estiver com o Mico em mãos.

10.2. Referências

IEZZI, Gelson *et al*. **MATEMATICA**: ciência e aplicações. 7. ed. São Paulo: Saraiva, 2013

10.3. Lista de Exercícios

Funções de 2° grau

1) (UFPA) O gráfico da função quadrática $y = x^2 + px + q$ tem uma só intersecção com o eixo dos x. Então, os valores de p e q obedecem à relação:

a) $q = \frac{p^2}{4}$

b) $q^2 = \frac{p}{2}$

c) $q = -\frac{p^2}{4}$

d) $q^2 = 4p$

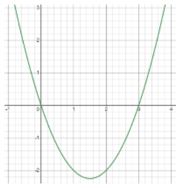
e) $q^2 = -4p$

2) (UEL-PR) A função real f, de variável real, dada por $f(x) = -x^2 + 12x + 20$, tem valor:

a) Mínimo, igual a -16, para $x = 6$

b) Mínimo, igual a 16, para x = - 12
c) Máximo, igual a 56, para x = 6
d) Máximo, igual a 72, para $x = 12$
e) Máximo, igual a 240, para $x = 20$

3) (Cesgranrio-RJ) O valor mínimo do polinômio $y = x^2 + bx + c$, cujo gráfico é mostrado na figura, é:



a) -1
b) $-\frac{9}{4}$
c) $-\frac{9}{2}$
d) $-\frac{3}{2}$
e) Nenhuma das anteriores

4) Determine a imagem da função $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$

-2 = -12 – 4 – 1 = -17
-1 = -3 – 2 –1 = -6
0 = 0 + 0 – 1= -1
1 = 3 + 2 –1 = 4
2 = 12 + 4 –1 = 15

5) Um ônibus de 40 lugares foi fretado para uma excursão. A empresa exigiu de cada passageiro R$ 20,00 mais R$ 2,00 por lugar vago. Por exemplo, se 30 pessoas comprarem a passagem, cada passagem custará R$ 40,00 (20 reais fixos + 20 reais por haver 10 lugares vagos). A empresa adota esse sistema de cobrança para evitar perder dinheiro quando o ônibus não possui muitos passageiros. Qual é o número de passageiros para que a rentabilidade da empresa seja máxima?

R(x) = (40-x) (20+2x)

R(x) = 800 + 80x - 20x - 2x²

R(x) = 800 + 60x - 2x².

Logo, o número de passageiros será 15

6) (ITA-SP) Os dados experimentais da tabela abaixo correspondem às concentrações de uma substância química medida em intervalos de 1 segundo. Assumindo que a linha que passa pelos três pontos experimentais é uma parábola, tem-se que a concentração em moles, após 2,5 segundos é:

Tempo (segundos)	Concentração (moles)
1	3
2	5

3	1

a) 3,60
b) 3,65
c) 3,70
d) 3,75 - 3x² + 11x - 5
e) 3,80

7) Um carro anda com velocidade constante de 40 km/h durante uma hora.
a) Quantos quilômetros o carro andou? 40km
b) Faça um gráfico de posição x tempo para ilustrar a trajetória do carro (o eixo x representará o tempo e o y indicará a posição do carro para aquele instante).
c) Agora, faça um gráfico de velocidade × tempo para analisar o comportamento da velocidade do carro durante esse percurso (o eixo x representará o tempo e o y indicará a velocidade do carro naquele instante)

Repare que a fórmula que usamos para calcular a posição ($S = v \cdot t$) nos permite visualizar a posição do carro a partir do gráfico de sua velocidade. O deslocamento do carro entre o tempo zero (t_0) e qualquer tempo (t_1) é dado pela área abaixo do gráfico de velocidade entre $x = t_0$ e $x = t_1$. Acontece que essa afirmação é válida para qualquer gráfico de velocidade, não só o caso em que a velocidade é constante. A posição do carro sempre é dada pela área abaixo do gráfico de velocidade. Sendo assim, podemos analisar o caso em que a velocidade não é constante.

10.4. Relatório Aula 6

Começamos a aula organizando os 12 alunos presentes em grupos de 04 pessoas. No começo da aula, tiramos as dúvidas sobre a lista que foi passada na aula anterior. Nessa lista, houve apenas uma dúvida no exercício 10, a qual foi solucionada por um dos professores que resolveu o exercício e explicou a forma de resolução para a turma. Perguntamos para os alunos quantos deles estavam na aula em que falamos sobre equação de segundo grau e percebemos que havia uma grande parte da turma que não estava presente nesse dia, então resolvemos retomar a equação de segundo grau para podermos entregar o dominó para eles. Houve grupos que resolveram todas as equações antes do jogo e houve jogos em que o grupo resolvia as equações conforme iam jogando. Em todos os grupos, havia um dos professores para ajudar com as resoluções das equações e possíveis dúvidas que surgiam. O dominó levou um tempo consideravelmente grande por conta das dificuldades dos alunos em sua resolução.

Entregamos a apostila para os alunos e fizemos a definição dos conceitos acerca de funções do 2° grau. Posteriormente um dos professores fez a representação no gráfico utilizando o Geogebra e com ele foi ilustrado o que acontece na função quando os coeficientes A, B e C são positivos e negativos. Ainda com a utilização do software, foram explicadas as características do vértice do gráfico: onde ele está localizado e como encontrá-lo utilizando as fórmulas para sua coordenada x e y. Pedimos que os alunos encontrassem o vértice da função $F(x)=2x^2-4x$, ajudando-os com as dúvidas que iam surgindo. Em seguida, foi explicado também por meio de fatoração como derivar a fórmula resolutiva da equação de 2º grau.

Para encerrar a aula, passamos o jogo do mico para fixar o conteúdo proposto, o qual foi um jogo de que os alunos gostaram bastante. Durante os jogos, os alunos estavam bem participativos e aproveitaram para tirar as suas dúvidas

11. Encontro 7

11.1. Plano de Aula 04/11/2023

Público-alvo: Alunos do Promat

Conteúdos: Polinômios, funções polinomiais, operações entre polinômios, fatoração de polinômios

Professores: Fabrício Rustick, Felipe Simão, Felipe Klumb, Milleni Ferreira

Objetivo geral:

Compreender o que são polinômios e suas propriedades

Objetivo específico:

Compreender conceitos

Operar com polinômios

Compreender e interpretar corretamente os enunciados de exercícios a fim de resolvê-los

Ser capaz de encontrar raízes de polinômios

Tempo de execução: 01 aula do Promat (3h 40 min)

Recursos didáticos: quadro, giz, folha de exercícios, projetor

Metodologia de encaminhamento:

Os professores iniciarão a aula retomando a lista passada no fim da última aula e tirando possíveis dúvidas. Após isso, os professores passarão as definições acerca de monômios, binômios, trinômios e polinômios:

Definição: Um monômio é um número ou expressão algébrica formada pelo produto de um número (coeficiente) por uma ou mais variáveis elevadas a expoentes que são números naturais.

Exemplos: $2x$, ab, $3xy^2$

O coeficiente do monômio é chamado de parte numérica e as variáveis que o acompanham são denominadas parte literal

Exemplo: no monômio $\frac{x^2yz}{2}$, a parte numérica é $\frac{1}{2}$ e a parte literal é x^2yz

Definição: Um binômio é uma expressão formada pela soma de dois monômios.

Definição: Um trinômio é uma expressão formada pela soma de três monômios.

Definição: Um polinômio é uma expressão formada pela soma de monômios (não importando quantos são os monômios). Binômios, trinômios e monômios são polinômios.

Definição: Chama-se função polinomial na variável x a função:

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Definida para todo x real e n natural não nulo

Exemplos:

$n = 2$: $\quad P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

$n = 3$: $\quad P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Os números reais a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 são chamados coeficientes do polinômio e as parcelas a_nx^n, $a_{n-1}x^{n-1}$, ..., a_2x^2, a_1x, a_0 são os termos do polinômio.

Não são polinômios expressões que tenham termos com x elevado a um número não natural, por exemplo:

$$f(x) = x^2 + x - \frac{1}{x}$$

$$g(x) = 3x^2 + \sqrt{x}$$

Definição: Chamamos de "grau do polinômio" o maior expoente ao qual estão elevadas as variáveis. Por exemplo:

é um polinômio de grau 3, pois o maior expoente que aparece nas partes literais é 3.

é um polinômio de grau 2, pois o maior expoente que aparece nas partes literais é 2.

Passadas as definições, os professores abordarão as quatro operações entre polinômios:

Soma de polinômios: Para somarmos dois polinômios, simplesmente unimos os monômios que possuem a mesma parte literal.

Exemplo: $(x^2 - 3x + 2) + (3x^3 - 2x^2 + 3x) = 3x^3 - x^2 + 2$

Subtração de polinômios: Para subtrairmos dois polinômios, também unimos monômios de mesma parte literal. Entretanto, é necessário fazer um "jogo de sinal" no polinômio após o sinal de menos. Exemplo:

$$(4x^2 - 3x + 5) - (x^4 - x + 1) = 4x^2 - 3x + 5 - x^4 + x - 1 = -x^4 + 4x^2 - 2x + 4$$

Após as definições das duas primeiras operações, os professores passarão os dois exercícios:

$$(x^5 - 3x + 4) - (x^5 - x^2 - 3x + 2) = x^5 - 3x + 4 - x^5 + x^2 + 3x - 2 = x^2 + 2$$

$2x^2 + 3x^2 + 6x^3 + 10x^3 + x + 5x + 4x^3 = 14x^3 + 5x^2 + 6x$

Para praticar a regra da soma de polinômios, haverá o jogo blackjack de polinômios neste momento.

O baralho utilizado é composto pelas seguintes 36 cartas:

$$Ax,\ 2x,\ 3x,\ 4x,\ 5x,\ 6x,\ 7x,\ 8x,\ 9x,\ 10x,\ 10x,\ 10x$$

$$Ax^2,\ 2x^2,\ 3x^2,\ 4x^2,\ 5x^2,\ 6x^2,\ 7x^2,\ 8x^2,\ 9x^2,\ 10x^2,\ 10x^2,\ 10x^2$$

$$Ax^3,\ 2x^3,\ 3x^3,\ 4x^3,\ 5x^3,\ 6x^3,\ 7x^3,\ 8x^3,\ 9x^3,\ 10x^3,\ 10x^3,\ 10x^3$$

O número A que multiplica alguns monômios vale 1 ou 11 (o que for mais vantajoso para quem possui a carta). Nesse jogo, os participantes não competem entre si: todos jogam contra o *dealer*

O professor será o *dealer* do jogo. No início do jogo, serão entregues duas cartas para todos (inclusive ao *dealer*), as quais podem ser vistas por todos os jogadores. Ao receberem suas cartas, os participantes devem somar os monômios obtidos (só podemos somar monômios de mesma parte literal!). Na sua vez de jogar, o aluno escolhe se deseja comprar mais uma carta ou não. Ao comprar uma nova carta, soma-se o monômio presente nela com o restante das suas cartas. O intuito do jogo é fazer com que um dos 3 coeficientes do polinômio chegue o mais próximo possível de 21, mas sem extrapolar esse valor. Caso algum coeficiente seja maior do que 21, o jogador "estoura" e perde o jogo. Para ganhar o jogo, o participante deve:

Não estourar
Ter um coeficiente em seu polinômio que seja maior do que todos os coeficientes do polinômio do *dealer*

Se o *dealer* estourar, todos os participantes que ainda não estouraram ganham automaticamente.

Após a prática do jogo, serão abordadas as operações de multiplicação e divisão de polinômios:

Multiplicação de polinômios: Para realizar essa operação, aplicamos a propriedade distributiva da multiplicação e simplificamos (somamos) os termos que obtivermos. Exemplo:

$$(x^2 + 3x) \cdot (-2x + 3) = -2x^3 + 3x^2 - 6x^2 + 9x = -2x^3 - 3x^2 + 9x$$

Dentre todos os métodos possíveis para efetuar a divisão de polinômios, será passado apenas o método de Descartes devido a sua maior simplicidade.

Quando efetuamos a divisão entre dois números inteiros D e d, encontramos quais são os dois outros números inteiros Q (quociente) e R (resto) tais que:

$$D = Q \cdot d + R$$

De modo que R seja menor que d (em módulo). De maneira análoga, quando dividimos um polinômio $D(x)$ pelo divisor $d(x)$, estamos em busca de dois polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ tais que

$$D(x) = Q(x) \cdot d(x) + R(x)$$

De modo que o grau de $R(x)$ seja menor do que o grau de $d(x)$.

Método de Descartes: É um método simples para achar a divisão entre dois polinômios. Ele consiste em determinar o polinômio quociente a partir de uma igualdade entre polinômios. Por exemplo:

Vamos dividir o polinômio $A(x) = 2x^4 - 3x^3 + x - 1$ pelo polinômio $B(x) = x^2 - 2x + 3$. Os polinômios quociente $Q(x)$ e resto $R(x)$ são tais que:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

$$2x^4 - 3x^3 + x - 1 = (x^2 - 2x + 3) \cdot Q(x) + R(x)$$

O polinômio $Q(x)$ precisa ter grau máximo igual a 2. Isso porque, ao multiplicarmos o monômio de maior grau de $Q(x)$ pelo monômio de maior grau de $B(x)$, obteremos o monômio de maior grau de $A(x)$. Sendo assim, podemos escrever que $Q(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são coeficientes a serem determinados. Também temos que o grau do polinômio resto é sempre menor do que o grau do polinômio divisor $B(x)$. Sendo assim, podemos escrever $R(x) = mx + n$. Substituindo os polinômios $Q(x)$ e $R(x)$:

$$(x^2 - 2x + 3) \cdot (ax^2 + bx + c) + (mx + n) = 2x^4 - 3x^3 + x - 1$$

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - 2ax^3 - 2bx^2 - 2cx + 3ax^2 + 3bx + 3c + mx + n = 2x^4 - 3x^3 + x - 1$$

$$ax^4 + (b - 2a)x^3 + (c - 2b + 3a)x^2 + (-2c + 3b + m)x + (3c + n) = 2x^4 - 3x^3 + x - 1$$

Comparando os dois polinômios resultantes, temos que os coeficientes das mesmas potências de x devem ser iguais:

$$a = 2$$

$$b - 2(2) = -3$$

$$b = 1$$

$$c - 2(1) + 3(2) = 0$$

$$c = -4$$

$$-2(-4) + 3(1) + m = 1$$

$$m = -10$$

$$3(-4) + n = -1$$

$$n = 11$$

Portanto, encontramos os polinômios que queríamos determinar:

$$Q(x) = 2x^2 + x - 4$$

$$R(x) = -10x + 11$$

Exemplo:

Depois de discutidas as 4 operações entre polinômios, os professores darão uma explicação do porquê a divisão de polinômios ser uma operação útil: será passado o conteúdo de fatoração de funções polinomiais (que usa a divisão) para obtenção de raízes do polinômio.

Definição: Toda função polinomial (ou polinômio) da forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Pode ser escrita na forma

$$P(x) = a_n(\mathrm{x} - \mathrm{r_n}) \dots (x - r_3) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_1)$$

Em que r_1, r_2, r_3, ..., r_n são as n raízes do polinômio.

Se r é uma das raízes de $P(x)$, então $P(x)$ é divisível por $(x - r)$, ou seja, na divisão de $P(x)$ por $(x - r)$, o polinômio resto $R(x)$ é zero.

Ao fazer essa divisão, estamos fatorando o polinômio $P(x)$, o que facilita a obtenção de raízes.

Exemplo: Vamos calcular quais são as três raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Ou seja, queremos os 3 valores de x para os quais $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.

Precisamos "adivinhar" uma das raízes para poder encontrar as outras duas. Podemos ver que, quando somamos os coeficientes do polinômio, obtemos zero. Isso indica que 1 é uma das raízes. Dividindo $P(x)$ por $(x - 1)$, obtemos:

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - 1) + R(x)$$

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (ax^2 + bx + c) \cdot (x - 1) + 0$$

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = ax^3 - ax^2 + bx^2 - bx + cx - c$$

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$$

$$a = 1,\ b = -1,\ c = -6$$

Ou seja, podemos reescrever $P(x)$ na forma fatorada:

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - 1) = (x^2 - x - 6) \cdot (x - 1)$$

Agora, as outras duas raízes de $P(x)$ são as raízes do polinômio quadrático, as quais podem ser obtidas pela fórmula resolutiva como sendo $r_1 = -2$ e $r_2 = 3$. Logo, o polinômio P(x) completamente fatorado se torna:

$$P(x) = Q(x) \cdot (x - 1) = (x + 2) \cdot (\mathrm{x} - 3) \cdot (x - 1)$$

Após a explicação de fatoração, haverá o uso do Geogebra para que os alunos percebam que toda função polinomial possui um gráfico associado a ela e que as raízes dos polinômios são os pontos em que esse gráfico corta o eixo x.

Para finalizar a aula, será feito um Kahoot com os alunos para que haja a fixação dos conceitos trabalhados. (Anexo 1)

Ao final, também será entregue uma lista de exercícios (Anexo 2) para que os alunos possam praticar os conceitos vistos ao longo da semana seguinte.

Anexo 1

- Qual é o grau do polinômio $5x^4 + 3x^3 - 7x + 2x^2 + x^6$?

$a)1$ $b)3$ $c)4$ $d)6$

R: d)

- Qual é o termo independente do polinômio $x^5 + 2 + x_2 - 3x - 7$?

$a)2$ $b) - 5$ $c) - 7$ $d)5$

R: b)

- Qual expressão é equivalente a $x + x + x + x$?

a)$x + 4$ b)x^4 c)$4x$ d)$4x^4$

R: c)

- Qual das seguintes opções não é um monômio?

a)$3x^2 - 7x^2$ b)$x \cdot y^2$ c)$x + y$ d)$-3x^3$

R: c)

- A expressão $2x^5 - x^4 + 2x^3 - 11x^2 + x^4 - 2x^5$ representa um:

a)monômio b)binômio c)trinômio d)nenhuma das alternativas

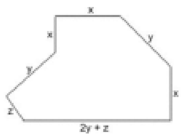
R: b)

- Efetuando a soma dos monômios $15xyz$ e $3xy$, obtemos:

a)18xyz b)18xy c)$18x^2y^2z$ d)nenhuma das alternativas

R: d)

- Qual polinômio representa o perímetro da seguinte figura?



a)$3x + 4y + 2z$ b)$3x + 2y + 3z$ c)$3x + 3y + z$ d)$3x + 3y + 5z$

R: a)

- Que expressão obtemos ao resolver a seguinte operação:

$$(4xy^2 + 3yz - z) - (2x^2y - z)$$

a)$4xy^2 - 2x^2y + 3yz$ b)$2xy^2 + 3yz$ c)$4xy^2 - 2x^2y + 3yz - 2z$ d)$2x^2y + 3yz - 2z$

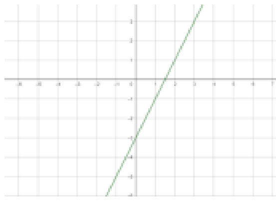
R: a)

- Que expressão obtemos ao multiplicar o binômio $2x - 2$ pelo trinômio $x^2 + x + 1$?

a)$2x^3 + 2x^2 + 2x - 2$ b)$2x^3 - 2$ c)$2x^2 - 2$ d)$2x^2 + 2x - 2$

R: b)

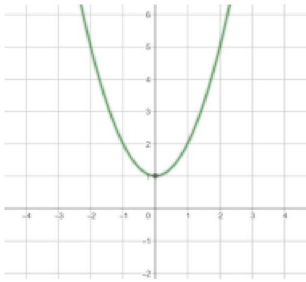
- Observando o gráfico a seguir, podemos afirmar que ele representa uma função polinomial de que grau?



a)0 b)1 c)2 d)3

R: b)

- Qual função polinomial representa o gráfico a seguir?

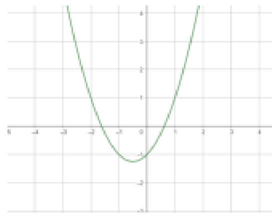


a)$2x + 1$ b)$2x^2 + x + 1$ c)$x^3 + 1$ d)$x^2 + 1$

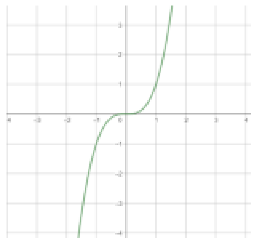
R: d)

- Qual gráfico representa a seguinte função polinomial: $f(x) = x^3 - x + 2$

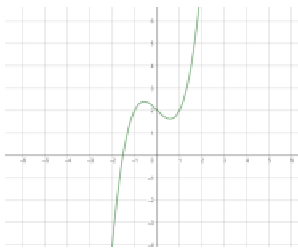
a)



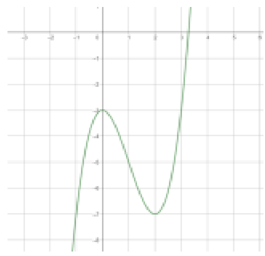
b)



c)



d)



R: c)

11.2. Material Entregue APOSTILA

Aula Polinômio

Monômio: Um monômio é um número ou expressão algébrica formada pelo produto de um número (coeficiente) por uma ou mais variáveis elevadas a expoentes que são números naturais.

Ex: $2x$, a^2,$3xy^2$

O coeficiente do monômio é chamado de parte numérica e as variáveis que o acompanham são denominadas parte literal.

Binômio: Um binômio é uma expressão formada pela soma de dois monômios.

Ex: $8x+2y$ / $3a-b$ / $xy+2y^2$

Trinômio: Um trinômio é uma expressão formada pela soma de três monômios.

Ex: x^2-xy+y^2 / y^2-6x+1 / a^2-ab+b^2

Polinômio: Um polinômio é uma expressão formada pela soma de monômios (não importando quantos são os monômios). Binômios, trinômios e monômios são polinômios.

Ex: $z^3-y^2+2x+144$ / $x^4 + 4y + 3z + 96x$

Função Polinomial: Chama-se função polinomial na variável x a função:

P(x)=anxn+an−1xn−1+…+a2x2+a1x+a0

Definida para todo x real e n natural não nulo:

Exemplos:

n=2 $\mathrm{P(x)} = a_2\mathrm{x}^2 + a_1\mathrm{x} + a_0$

n=3 $\mathrm{P(x)} = a_3\mathrm{x}^3 + a_2\mathrm{x}^2 + a_1\mathrm{x} + a_0$

Os números reais $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ são chamados coeficientes do polinômio e as parcelas $a_n x^n$,$a_{n-1}x^{n-1}$,…,a_2x^2,a_1x,a_0 são os termos do polinômio.

Não são polinômios expressões que tenham termos com x elevado a um número não natural, por exemplo:

$$f(x) = x^2 + x - \frac{1}{x}$$

$$g(x) = 3x^2 + \sqrt{x}$$

Grau de um polinômio: o maior expoente ao qual estão elevadas as variáveis. Por exemplo:

Ex: $\mathrm{a}^3 + 3\mathrm{a}^2\mathrm{b} + 3\mathrm{ab}^2 + \mathrm{b}^3$ → é um polinômio de grau 3, pois o maior expoente que aparece nas partes literais é 3.

Adição de polinômios: Para somarmos dois polinômios, simplesmente unimos os monômios que possuem a mesma parte literal.

Exemplo:

$$(\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} + 2) + (3\mathrm{x}^3 - 2\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x}) = 3\mathrm{x}^3 - \mathrm{x}^2 + 2$$

Subtração de polinômios: Para subtrairmos dois polinômios, também unimos monômios de mesma parte literal. Entretanto, é necessário fazer um “jogo de sinal” no polinômio após o sinal de menos. Exemplo:

Exemplos: $(4\mathrm{x}^2-3\mathrm{x}+5) - (x^4-\mathrm{x}+1) = 4\mathrm{x}^2-3\mathrm{x}+5-x^4+\mathrm{x}-1 = -\mathrm{x}^4+4\mathrm{x}^2-2\mathrm{x}+4$

Anotação:

$(\mathrm{x}^2+3\mathrm{x}) \cdot (-2\mathrm{x}+3) = -2\mathrm{x}^3+3\mathrm{x}^2-6\mathrm{x}^2+9\mathrm{x} = -2\mathrm{x}^3-3\mathrm{x}^2+9\mathrm{x}$

Método de Descartes: É um método simples para achar a divisão entre dois polinômios. Ele consiste em determinar o polinômio quociente a partir de uma igualdade entre polinômios. Por exemplo:

Vamos dividir o polinômio $\boldsymbol{A(x) = 2x^4 - 3x^3 + x - 1}$ pelo polinômio $\boldsymbol{B(x) = x^2 - 2x + 3}$;

Os polinômios quociente Q(x) e resto R(x) são tais que: A(x)=B(x)·Q(x)+R(x)=

$$\boldsymbol{2x^4 - 3x^3 + x - 1 = (x2 - 2x + 3) \cdot Q(x) + R(x)}$$

O polinômio Q(x) precisa ter grau máximo igual a 2. Isso porque, ao multiplicarmos o monômio de maior grau de Q(x) pelo monômio de maior grau de B(x), obteremos o monômio de maior grau de A(x). Sendo assim, podemos escrever que Q(x)=ax²+bx+c, em que a, b e c são coeficientes a serem determinados. Também temos que o grau do polinômio resto é sempre menor do que o grau do polinômio divisor B(x). Sendo assim, podemos escrever $R(x) = mx + n$. Substituindo os polinômios Q(x) e R(x):

$$(x2 - 2x + 3) \cdot (ax2 + bx + c) + (mx + n) =$$
$$\mathbf{2x^4 - 3x^3 + x - 1}$$
$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - 2ax^3 - 2bx^2 - 2cx + 3ax^2 + 3bx + 3c + mx + n = \mathbf{2x^4 - 3x^3 + x - 1}$$
$$ax^4 + (b - 2a)x^3 + (c - 2b + 3a)x^2 + (-2c + 3b + m)x + (3c + n) = \mathbf{2x^4 - 3x^3 + x - 1}$$

Comparando os dois polinômios resultantes, temos que os coeficientes das mesmas potências de x devem ser iguais:

	$\boldsymbol{a = 2}$
$b - 2(2) = -3$	$\boldsymbol{b = 1}$
$c - 2(1) + 3(2) = 0$	$\boldsymbol{c = -4}$
$-2(-4) + 3(1) + m = 1$	$\boldsymbol{m = -10}$
$3(-4) + n = -1$	$\boldsymbol{n = 11}$

Portanto, encontramos os polinômios que queríamos determinar:

$\boldsymbol{Q(x) = 2x^2 + x - 4}$

$\boldsymbol{R(x) = -10x + 11}$

Anotação:

11.3. Lista de Exercícios

Polinômios

Anexo 2

1)Qual é o grau do polinômio P(x) = $2x^3 + x^2 - 4x + 1$?

Sempre será o grau do maior monômio, logo $2x^3$. 3 é o grau.

2) Quando temos um polinômio, chama-se raiz do polinômio a cada valor de x que anula (P(x)=0). Esse valor também se dá o nome de zero do polinômio. A raiz de um polinômio pode ser um número real (racional ou irracional) ou imaginário. Qual polinômio a seguir tem as raízes -1 e 4 como solução?

A- P (x) = $x^2 + x – 3$
B- P (x) = $x^2 + 2x – 6$
C- P (x) = $2x^2 + x – 1$
D- P (x) = $x^2 - 3x – 4$

$(-1)^2 + 3 – 4 = 0$ e $16 – 12 – 4 = 0$

3) Sendo P(x) = $x^3 + x^2 – x$ e Q (x) = $x^4 + 4$, o produto entre P(x) e Q(x) resulta em um polinômio de grau:

A- –1
B- 1
C- 4

D- 7
E- 12

$X^4 \times X^3 = X^7$

4) Sendo o polinômio $P(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + k$ e $Q(x) = x + 2$, qual deve ser o valor de k para que P(x) seja divisível por Q(x), ou seja, para que essa divisão não tenha resto?

A- –34.
B- –17.
C- 0.
D- 17.
E- 34. $(2x^2 - 8x + 17) \times (x+2) = 0$

5) Simplifique a seguinte expressão algébrica: $3xy + 7xy^2 - 6xy + 2xy^3 - 10xy^2$

A- $3 + 3xy^2 - 2xy^3$
B- $-3xy - 3xy^2 + 2xy^3$
C- $-4xy + 3xy^2 + 3xy^3$
D- $+4xy - 3xy2 - 3xy^3$
E- $-6xy - 6xy^2 + 4xy^3$

6) Uma forma fatorada da expressão $21x^3 + 21x^2 - 15x - 15$ é

A- $3x(7x^2 + 7x - 5)$.
B- $(3x + 3)(7x^2 - 5)$.
C- $(7x + 7)(3x^2 + 5)$.
D- $(21x)(x^2 + x - 1)$.
E- $x(21x^2 + 21x - 5)$.

7) O resto da divisão do polinômio $A(x) = x^4 - 7x^2 + 3x - 1$ por $B(x) = x-2$ é igual a:

A- 0
B- 1
C- −3
D- −7

11.4. Referências

TODA MATÉRIA. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/polinomios/. Acesso em: 18 dez. 2023.

INFOESCOLA. Disponível em: https://www.infoescola.com/matematica/divisao-de-polinomios/. Acesso em: 18 dez. 2023.

11.5. Relatório Aula 7

Nessa aula vieram 8 alunos, os alunos estavam preocupados com o Enem então estavam um pouco dispersos no começo, começamos com as definições de monômio, binômio, trinômio e polinômio, pois os alunos não apresentaram dúvidas sobre a lista da aula passada. Percebendo que os alunos estavam dispersos, procuramos fazer eles participarem mais na parte de adição e subtração, fazemos perguntas sobre como resolveria e pedimos para a turma montar outra adição de polinômio para resolvermos, assim fizemos com a subtração também e conseguimos que os alunos dispersos prestassem atenção na aula e interagissem mais conosco.

No final da explicação pedimos para que eles formassem grupos de 4 pessoas para que eles jogassem o Black Jack. Os alunos gostaram e interagiram bastante durante o jogo e aproveitaram a oportunidade para tirar as dúvidas que eles tinham no momento, depois de um tempo pedimos para que os alunos se juntassem em um único grupo para fazemos um jogo com todos eles.

Depois do intervalo encaminhamos os alunos ao laboratório de informática. Ficou um professor na sala para acompanhar os dois alunos que faltavam. Chegando no laboratório ocupamos um pouco do tempo da aula para ligar os computadores, pedimos para os alunos pegarem a apostila que foi entregue no começo para continuarem acompanhando as explicações que seriam passadas, sendo entre elas multiplicação e divisão. Foi falado rapidamente sobre como se encontra a raiz de um polinômio, pois o tempo estava ficando curto para fazer o Kahoot.

Na sequência, mostramos no Geogebra sobre como é o estilo dos gráficos das funções polinomiais, dependendo do grau do polinômio. Em seguida iniciamos o Kahoot, o tempo da aula esgotou antes que fossem feitas todas as perguntas do quis, por isso deixamos os três últimos exercícios de fora e encerramos a aula. Os alunos apresentaram bastante erros durante essa atividade, o percentual de acertos foi muito baixo e chegou a ser zero em uma questão, tal fato pode ser justificado em razão das questões do quiz apresentarem diversas “pegadinhas” que induziram os alunos ao erro.

12. Encontro 8

12.1. Plano de Aula 11/11/2023

Público-alvo: Alunos do PROMAT

Conteúdos: Polígonos

Professores: Fabrício Rustick, Felipe Klumb, Felipe Simão, Milleni de Souza

Objetivo geral:

Compreender o que são polígonos e as suas classificações e identificar as propriedades de triângulos.

Objetivos específicos:

Entender a definição de polígonos e visualizar quais são os elementos que os compõem;
Classificar polígonos a partir da quantidade de lados que possuem;

Identificar as condições para que um polígono seja regular;

Compreender a classificação de triângulos a partir das medidas de seus lados e ângulos internos;

Compreender o Teorema de Pitágoras para encontrar as medidas dos lados de um triângulo retângulo;

Tempo de execução: Uma aula do PROMAT (3h 40min)

Recursos didáticos: Geoplano, régua, transferidor, caneta/lápis, slides, jogo de tabuleiro, dados.

Encaminhamento metodológico:

No início da aula vamos conversar com os alunos sobre a lista de exercícios do encontro anterior (polinômios), nesse momento vamos discutir e sanar possíveis dúvidas que os alunos possam ter tido durante a realização dos exercícios.

Em seguida, vamos solicitar que os alunos se reúnam em grupos de 4 pessoas, com a intenção de promover uma melhor comunicação e interação entre eles em relação aos conteúdos abordados durante o desenvolvimento da aula.

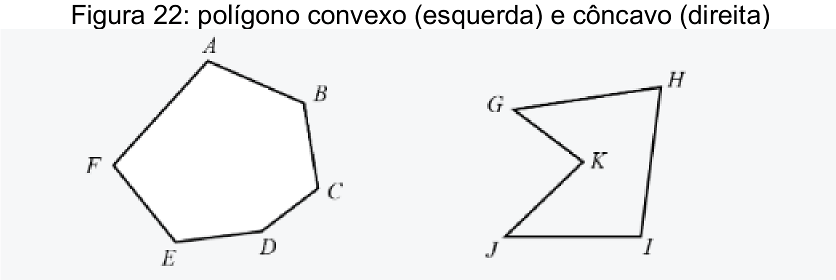
Apresentaremos a definição de polígono através de slides:

Definição:

Um polígono é uma figura geométrica formada por linhas poligonais que são segmentos de retas que não se cruzam e que se unem a partir de seus extremos.

Podemos classificar um polígono como sendo **convexo** ou **côncavo** (não convexo).

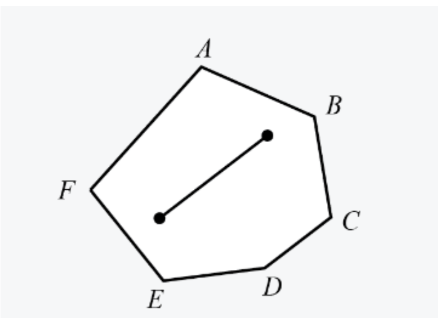
Figura 22: polígono convexo (esquerda) e côncavo (direita)



Fonte: https://content.querobolsa.com.br/assets/83e26894-1d05-4000-8b44-4b9aa19cdefa. Acesso em: 06 nov. 2023.

No polígono *ABCDEF*, tomando dois pontos distintos na região interior do polígono e traçando um segmento de reta que os une, é possível observar que tal segmento se encontra totalmente no interior do polígono:

Figura 23: linha em polígono convexo

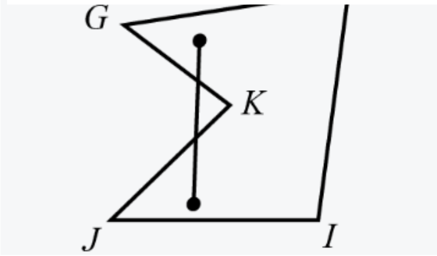


A linha começa e termina sem sair de dentro do polígono. Assim, dizemos que o polígono *ABCDEF* é convexo.

Fonte:https://content.querobolsa.com.br/assets/9efab9e6-7836-435f-9911-286b60664b6a. Acesso em: 06 nov. 2023.

Agora, considerando o polígono *GHIJK*, o mesmo não ocorre caso tomemos os dois pontos ilustrados abaixo e os unimos via um segmento de reta. É fácil ver que tal segmento não se encontra completamente na região interior do polígono. Deste modo, o polígono *GHIJK* é dito ser côncavo.

Figura 24: linha em polígono côncavo



Linha sai e volta para o polígono.

Fonte: https://content.querobolsa.com.br/assets/044fc07f-14b0-4575-8976-b211915a3701. Acesso em: 06 nov. 2023.

Em seguida, comentaremos que um polígono pode ser classificado a partir da quantidade de lados que ele possui. Apresentaremos através de slides a nomenclatura de alguns polígonos de acordo com a quantidade de lados que eles possuem:

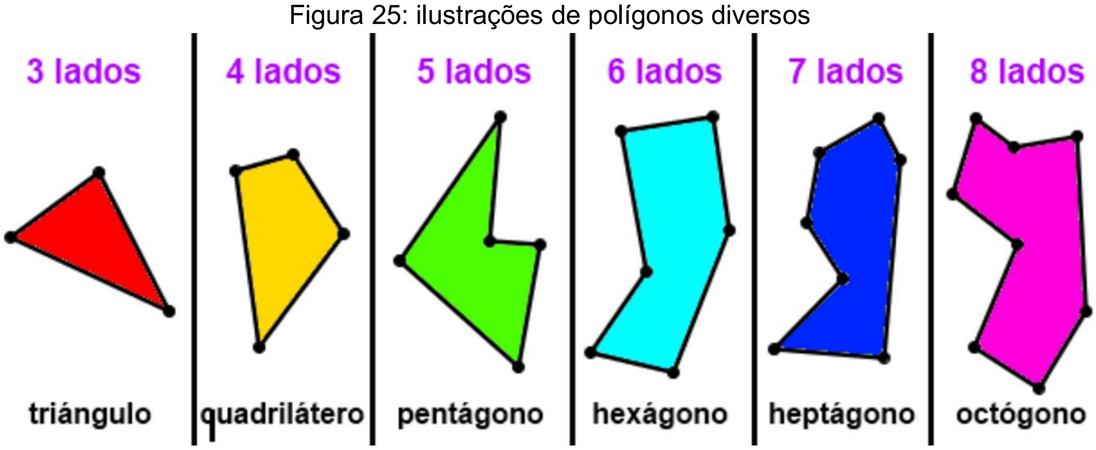
Quadro 2:Tabela dos lados de um polígono

Quantidade de lados	Nome
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

Fonte:
https://www.bing.com/ck/a?!&&p=9a1b10ce75100e25JmltdHM9MTcwMjU5ODQwMCZpZ3VpZD0yOWU4MmYyYy1jYzViLTZlNWQtM2Y1Zi0zYzY3Y2QzMDZmYWImaW5zaWQ9NTc0MQ&ptn=3&ver=2&hsh=3&fclid=29e82f2c-cc5b-6e5d-3f5f-3c67cd306fab&u=a1L2ltYWdlcy9zZWFyY2g_cT10YWJlbGEgZGUgbGFkb3MgZGUgdW0gcG9sw61nb25vJkZPUk09SVFGUkJBJmlkPUU4RTk4NTEzODczQTdENjEwQUFFOEIzNzQ0ODI5MUVBQ0I4OUU10QTI&ntb=

Mostraremos também algumas possíveis representações geométricas de alguns desses polígonos:

Figura 25: ilustrações de polígonos diversos



Fonte: https://3.bp.blogspot.com/VJ5Ehm7hJwo/VGUe3RpYhsI/g/td29_vX3ZKA/s1600/p2.png. Acesso em: 06 nov. 2023.

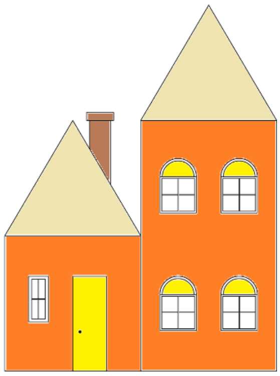
Nesse momento utilizaremos o geoplano como recurso didático para explorar o conteúdo, objetivando facilitar o entendimento dos alunos referente a representação geométrica de polígonos.

Explicação:

O geoplano retilíneo consiste em uma placa de madeira de forma quadrada ou retangular em que são cravados pregos ou pinos formando uma malha quadriculada (reticulado). A distância entre os pregos, tanto na horizontal, quanto na vertical, é sempre a mesma e as representações geométricas são feitas utilizando-se elásticos coloridos (atilhos) ou cordões.

Mostraremos através de slides a seguinte imagem para os alunos e pediremos que identifiquem polígonos nesse desenho e os reproduzam no geoplano, não sendo necessário reproduzir as janelas e portas.

Figura 26: desenho a ser montado pelos alunos

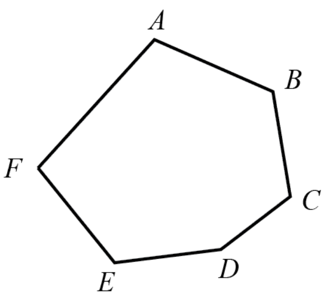


Fonte: http://www.ensinandomatematica.com/wpcontent/uploads/2017/02/casa-geometria.bmp. Acesso em: 06 nov. 2023.

Em seguida discutiremos sobre as representações realizadas pelos alunos.

Apresentaremos e definiremos os elementos de um polígono através dos slides, utilizando o seguinte como exemplo para contextualização:

Figura 6:



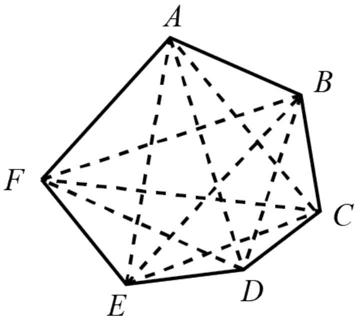
Fonte: https://content.querobolsa.com.br/assets/865300c1-0341-4c97-adaa-15c2f8a1ae27. Acesso em: 06 nov. 2023.

Os **vértices** são os pontos *A, B, C, D, E* e *F*, os quais ligam os segmentos de retas.

Os **lados** do polígono são os segmentos de reta que unem dois vértices consecutivos; neste caso: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{AF}$.

As **diagonais** de um polígono são os segmentos de reta com extremidades em dois vértices não consecutivos. No nosso exemplo, as diagonais são: $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$ E $\overline{DF}$. Veja:

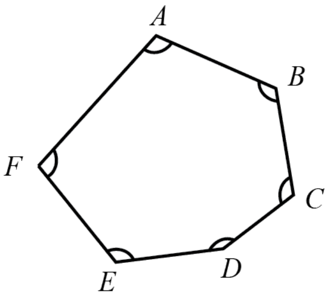
Figura 7:



Fonte: https://content.querobolsa.com.br/assets/c7a0ae43-bb96-496a-983e-2b59e6f70da7. Acesso em: 06 nov. 2023.

Os **ângulos internos** dos polígonos são os formados pelas semirretas que contém os lados do polígono:

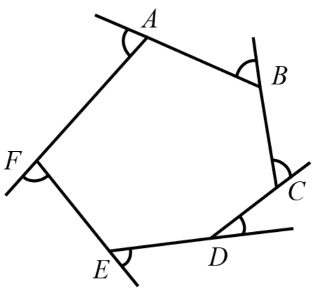
Figura 8:



Fonte:https://content.querobolsa.com.br/assets/b4fe8545-a5e2-4244-81fa-6329d5b07f02. Acesso em: 06 nov. 2023.

Os **ângulos externos** são os que se formam ao se prolongar um de seus lados:

Figura 9:



Fonte:https://content.querobolsa.com.br/assets/82ce0f9a-b852-4c60-98ea-23472c2957e9. Acesso em: 06 nov. 2023.

Em seguida vamos apresentar algumas propriedades dos polígonos:

O **número de diagonais em cada vértice** pode ser obtido pela seguinte expressão, sendo n o número de lados e d_v o número de diagonais por vértice:

$$d_v = n - 3$$

Ex: Qual é o número de diagonais por vértice de um quadrilátero?

R:

$$d_v = 4 - 3$$

$$d_v = 1$$

O **número total de diagonais** de um polígono pode ser calculado através do seu número de lados. Indicando pôr *da* quantidade de diagonais que um polígono tem e sendo *n* o seu número de lados, então:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Ex: Qual o número total de diagonais de um quadrilátero?

R:

$$d = \frac{4(4-3)}{2}$$

$$d = \frac{16-12}{2}$$

$$d = 2$$

O **número de triângulos formados a partir de um vértice** ao traçar as diagonais desse vértice, pode ser dado por:

$T = n - 2$

Ex: Qual o número de triângulos formados ao traçar as diagonais de um dos vértices de um quadrilátero?

R: $$T = 4 - 2$$

$$T = 2$$

A **soma dos ângulos internos** pode ser indicada por S_i e é obtida a partir da fórmula:

$$S_i = (n-2) \cdot 180°$$

Para todo polígono, podemos gerar $n - 2$ triângulos dentro dele. A soma dos ângulos de cada um desses triângulos é $180°$, e assim chegamos nessa fórmula.

Ex: Qual é a soma dos ângulos internos de um quadrilátero?

R:

$$S_i = (4-2) \cdot 180°$$

$$S_i = 2 \cdot 180°$$

$$S_i = 360°$$

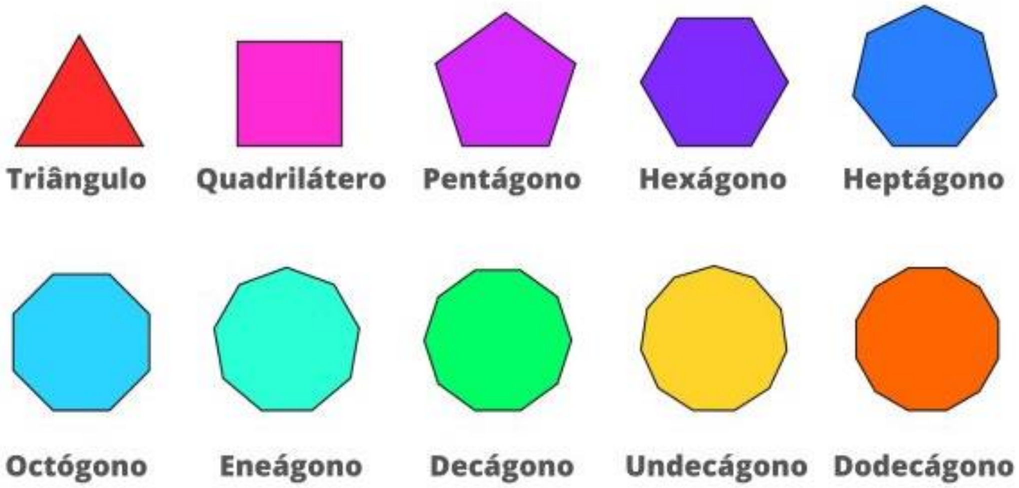
A **soma dos ângulos externos**, indicada por S_e independe do número de lados, pois seu valor é invariável independente do polígono:

$$S_e = 360°$$

Em seguida falaremos sobre **polígonos regulares**:

Um **polígono regular** é aquele em que os seus lados são congruentes entre si, ou seja, todos têm a mesma medida. Por consequência, as medidas dos seus ângulos internos e externos também são iguais entre si.

Figura 27: polígonos regulares



Fonte: https://static.escolakids.uol.com.br/2023/07/exemplos-de-poligonos.jpg. Acesso em: 06 nov. 2023.

Como todo **ângulo interno** de um polígono regular possui a mesma medida, então é possível calcular o seu valor. Denotando por α_i a medida de um ângulo interno de um polígono regular, temos que:

$$\alpha_i = \frac{S_i}{n}$$

Do mesmo modo, se α_e for a medida de um **ângulo externo** de um polígono regular de n lados, então:

$$\alpha_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360°}{n}$$

Outra forma de obter o valor do ângulo externo é pela expressão:

$$\alpha_e = 180° - \alpha_i$$

Solicitaremos que os alunos utilizem as expressões matemáticas recém apresentadas para preencher a seguinte tabela relacionada a polígonos regulares:

Quadro 3: Medidas de um polígono

Nº de lados	Nº de triângulos formados a partir de um vértice	Soma dos ângulos internos	Medida de cada ângulo interno	Medida de cada ângulo externo	Nº de diagonais em cada vértice	Nº total de diagonais
3	1	180	60	120	0	0
4	2	360	90	90	1	2
5	3	540	108	72	2	5

6	4	720	120	60	3	9
7	5	900	128,6	51,4	4	14
8	6	1080	135	45	5	20

Acompanharemos os alunos durante a realização da atividade tirando possíveis dúvidas e dificuldades que possam apresentar.

Ao terminarem, pediremos que caso queiram compartilhem os valores que encontraram e os discutiremos.

Em seguida exploraremos sobre os polígonos que possuem 3 lados (triângulos):

Classificação dos triângulos quanto aos **lados**:

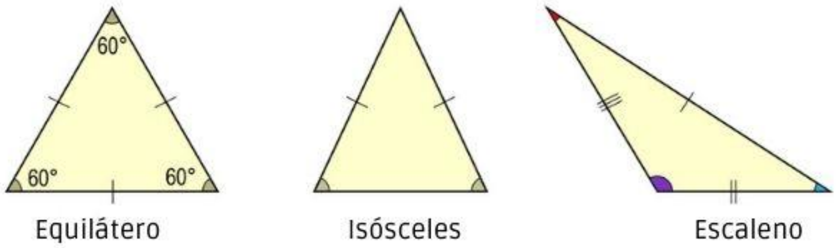
Os triângulos podem ser classificados de três formas diferentes de acordo com seus lados: podem ser **equiláteros**, **isósceles** ou **escalenos**.

Um triângulo é classificado como **equilátero** quando as medidas dos seus lados são todas congruentes e, consequentemente os ângulos também.

Um triângulo é **isóscele** quando possui exatamente dois lados congruentes.

E por fim, um triângulo é considerado **escaleno** quando todos os lados possuem medidas distintas.

Figura 28: Classificação de triângulos quanto aos lados



Fonte: https://static.mundoeducacao.uol.com.br/mundoeducacao/2021/11/equilatero-isosceles-escaleno.jpg. Acesso 06 nov. 2023.

Classificação dos triângulos quanto aos **ângulos**:

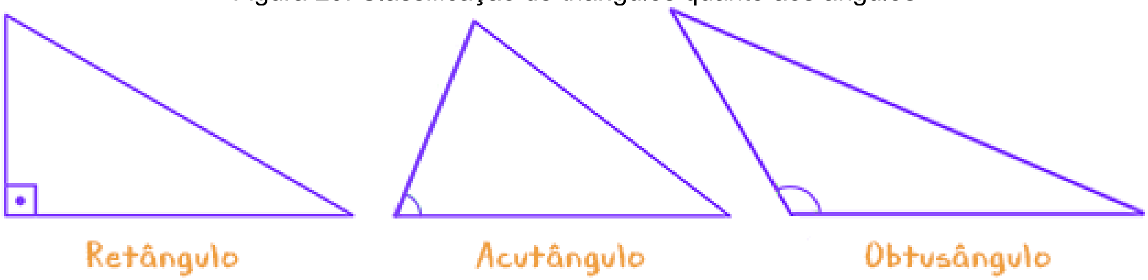
Quando analisamos os ângulos do triângulo, há também três casos: o **triângulo acutângulo**, o **triângulo retângulo** e o **triângulo obtusângulo**.

Um triângulo é classificado como **acutângulo** quando ele possui todos ângulos agudos, ou seja, a medida de cada um de seus ângulos é maior que $0°$ e menor que $90°$ $(0° < \alpha < 90°)$.

Um triângulo pode ser classificado como **triângulo retângulo** quando ele possui um ângulo reto, ou seja, um ângulo de $90°$.

Um triângulo é **obtusângulo** quando possui um ângulo obtuso, ou seja, quando um de seus ângulos mede mais do que $90°$.

Figura 29: Classificação de triângulos quanto aos ângulos

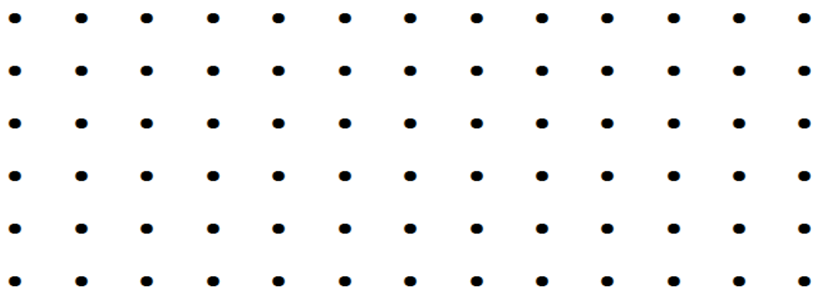


Fonte: https://blog.professorferretto.com.br/wp-content/uploads/2018/03/17.png. Acesso em: 06 nov. 2023.

Utilizaremos novamente o geoplano para explorar os conceitos, nesse momento solicitaremos que os alunos representem livremente três triângulos diferentes no geoplano.

Em seguida solicitaremos que esquematizem esses mesmos triângulos em uma malha de papel como a seguinte e os classifiquem de acordo com as medidas dos lados e ângulos que eles apresentam, para isso orientaremos que realizem a medição desses elementos com o uso de régua e transferidor.

Figura 30: malha de pontos

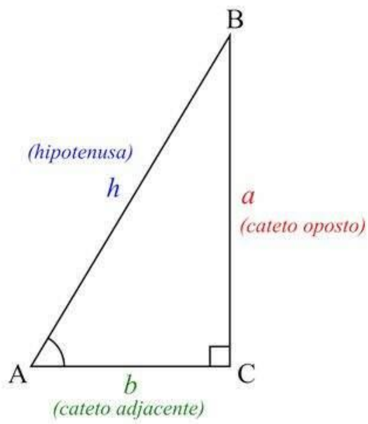


Explicaremos sobre o Teorema de Pitágoras, mostrando como utilizá-lo para encontrar as medidas dos lados de um triângulo retângulo:

Em um triângulo retângulo, os catetos são os lados que formam o ângulo reto e hipotenusa é o lado oposto ao ângulo reto. Considere um triângulo retângulo em que os catetos medem a e b e a hipotenusa mede c.

O teorema de Pitágoras determina que o quadrado da medida da hipotenusa (c^2) é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos ($a^2 + b^2$). Portanto a fórmula do teorema de Pitágoras é $c^2 = a^2 + b^2$.

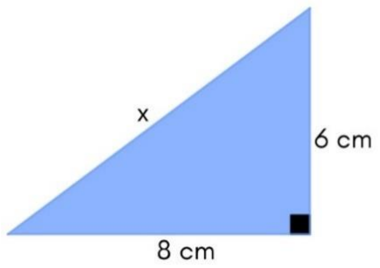
Figura 31: elementos do triângulo retângulo



Fonte: https://images.educamaisbrasil.com.br/content/banco_de_imagens/guia-de-estudo/D/triangulo-retangulo-matematica.jpg. Acesso em: 06 nov. 2023.

Utilizamos o Teorema de Pitágoras para calcular a medida de um lado desconhecido de um triângulo retângulo quando se tem as medidas dos outros dois lados.

Ex:



$$x^2 = 6^2 + 8^2$$

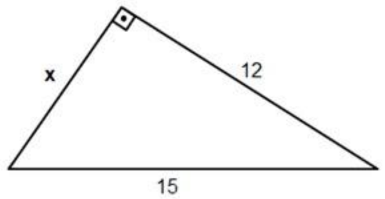
$$x^2 = 36 + 64$$

$$x^2 = 100$$

$$x = \sqrt{100}$$

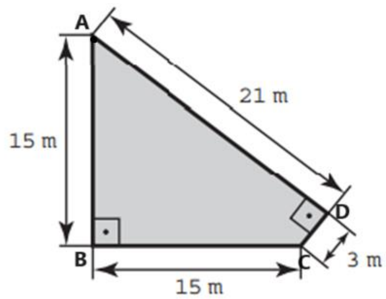
$$x = 10$$

Solicitaremos que os alunos encontrem a medida do lado desconhecido do seguinte triângulo:



Fonte: https://blogger.googleusercontent.com/img/b/R29vZ2xl/O6KhDxZ7MPAsqzXpezJHQ9/s292/Sem%20t%C3%ADtulo.jpg. Acesso em: 06 nov. 2023.

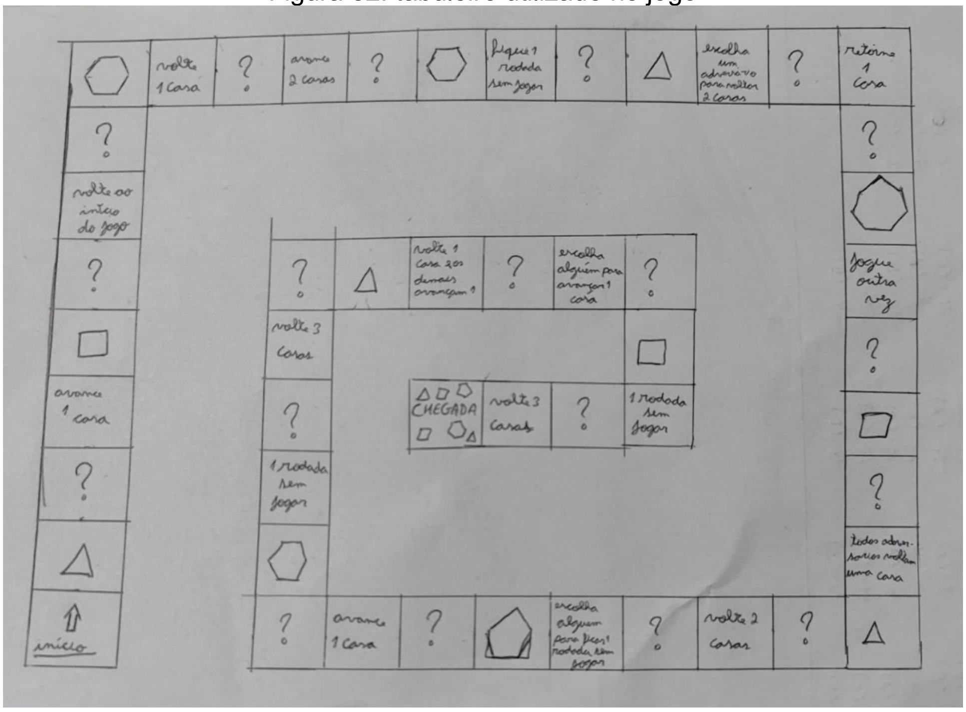
Solicitaremos que os alunos tentem calcular a medida da diagonal $\overline{AC}$ da seguinte figura utilizando o Teorema de Pitágoras:



Fonte: https://pt-static.z-dn.net/files/d6c/91967a050740fcce8ae1e53cf4f2674f.jpg. Acesso em: 06 nov. 2023.

Ao fim da aula utilizaremos o seguinte jogo de tabuleiro como metodologia ativa para fixação dos conteúdos:

Figura 32: tabuleiro utilizado no jogo



Fonte: Acervo dos autores (2023)

Os jogadores começam todos na casa escrito “Início”, devem escolher algum deles para começar o jogo e os seguintes são definidos a partir do sentido anti-horário do jogador inicial. Cada jogador deve lançar o dado e avançar o número de casas marcado no dado e realizar a atividade indicada na casa que está localizado. As casas marcadas com representações de polígonos não indicam nenhuma ação, podem ser consideradas como um “descanso”, caso o jogador se encontre em uma casa com um símbolo de interrogação deverá retirar uma pergunta da pilha de cartas, algum dos outros jogadores lê a pergunta retirada e em caso de acerto o jogador avança duas casas, caso a resposta seja incorreta o jogador deve retornar duas casas.

Vence o jogo o participante que primeiro chegar à casa onde se está escrito “Chegada”

Avaliação:

A avaliação do desenvolvimento dos alunos acerca do conteúdo trabalhado será feita durante o processo da aula, observando o desempenho dos mesmos durante a realização das atividades, exercícios e jogos propostos.

12.2. Referências

QUERO BOLSA Disponível em: Polígonos - Manual do Enem (querobolsa.com.br) Acesso dia: 06 nov. 2023

BLOGDOEAD Disponível em :https://www.blogdoead.com.br/tag/estude-para-o-enem/area-e-perimetro#:~:text=%C3%81rea%3A%20se%20refere%20%C3%A0%20medida,seja%2C%20dos%20lados%20da%20figura. Acesso dia: 06 nov. 2023

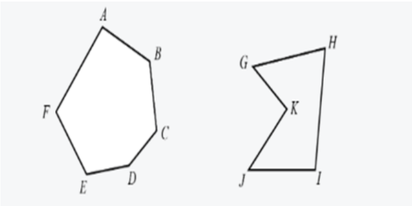
BRASIL ESCOLA Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/triangulo.htm Acesso dia:06 nov. 2023

ENSINANDO MATEMATICA Disponível em: Ensinando geometria com o geoplano (ensinandomatematica.com) Acesso dia: 06 nov. 2023

BRASIL ESCOLA Disponível em: [Teorema de Pitágoras: fórmula, como aplicar - Brasil Escola (uol.com.br)] Acesso em: 06 nov. 2023

12.3. Material Entregue

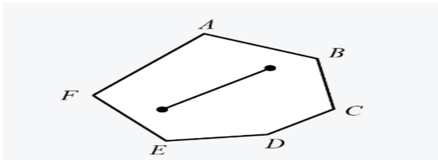
Promat-11/11/2023

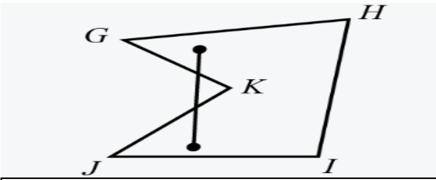


Um polígono é uma figura geométrica formada por linhas poligonais que são segmentos de retas que não se cruzam e que se unem a partir de seus extremos.

Podemos classificar um polígono como sendo **convexo** ou **côncavo** (não convexo).

A linha começa e termina sem sair de dentro do polígono. Assim, dizemos que o polígono *ABCDEF* é convexo.



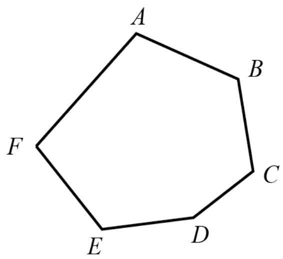


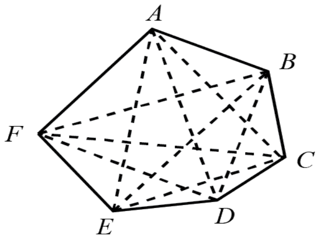
Linha sai e volta para o polígono. Assim dizemos que ele é côncavo

Quantidade de lados	Nome
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

Os **vértices** são os pontos *A, B, C, D, E* e *F*, os quais ligam os segmentos de retas.

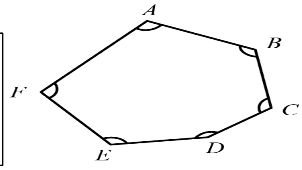
Os **lados** do polígono são os segmentos de reta que unem dois vértices consecutivos; neste caso: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{AF}$.

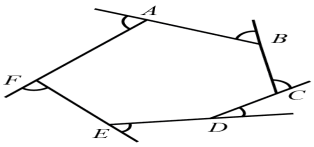




As **diagonais** de um polígono são os segmentos de reta com extremidades em dois vértices não consecutivos. No nosso exemplo, as diagonais são: $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{BF},$ ___ ___ ___

Os **ângulos internos** dos polígonos são os formados pelas semirretas que contém os lados do polígono:

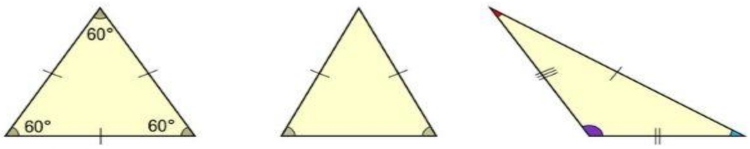




Os **ângulos externos** são os que se formam ao se prolongar um de seus lados:

Um triângulo é classificado como:

Equilátero quando as medidas dos seus lados são todas



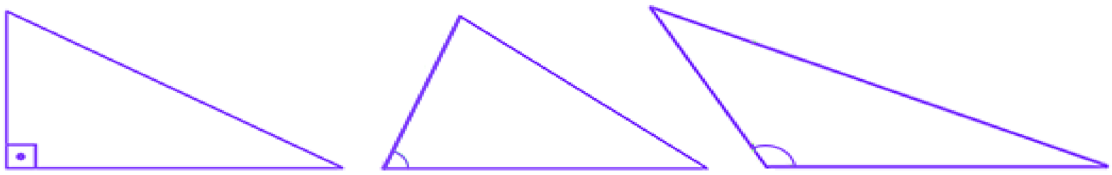
Equilátero   Isósceles   Escaleno

Um triângulo pode ser classificado como:

Triângulo retângulo quando ele possui um ângulo reto, ou seja, um ângulo de $90°$.

Acutângulo: quando ele possui todos os ângulos agudos, ou seja, a medida de cada um de seus ângulos é maior que $0°$ e menor que $90°$ $(0° < \alpha < 90°)$.

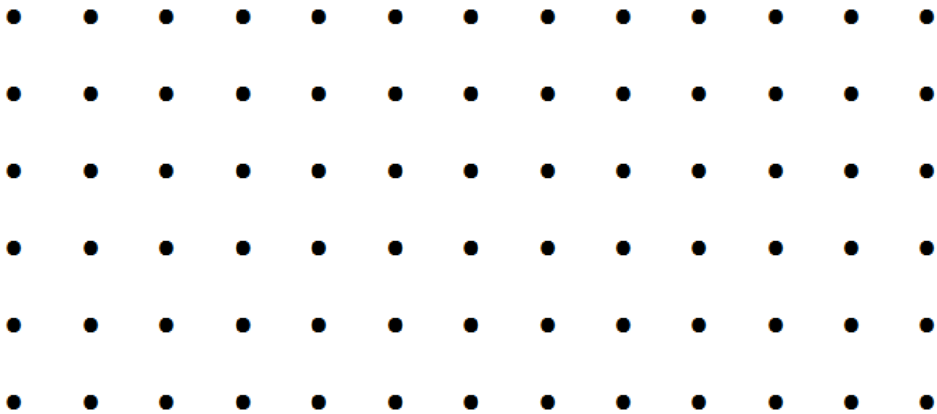
Obtusângulo quando possui um ângulo obtuso, ou seja, quando um de seus ângulos mede mais do que $90°$.



Retângulo   Acutângulo   Obtusângulo

Anotações:

Atividade 1:

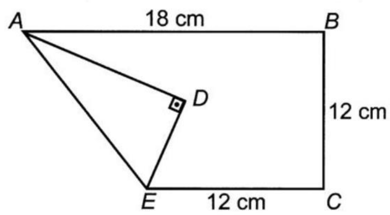


Anotação:

12.4. Lista de Exercícios

Geometria plana – polígonos

1) (ENEM 2019 – questão 177 – prova rosa) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do origami (ori = dobrar; kami = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do origami é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do origami, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura.



Após essa primeira dobradura, a medida do segmento AE é?

a) $2\sqrt{22}$ cm.
b) $6\sqrt{3}$ cm.
c) 12 cm.
d) $6\sqrt{5}$ cm.
e) $12\sqrt{2}$ cm.

AD = BC = 12
18 – 12 = ED
ED = 6
$12^2 + 6^2 = AE^2$

$144 + 36 = AE^2$
$\sqrt{180} = AE$
$\sqrt{(36x5)} = AE$
$6\sqrt{5} = AE$

2) (ENEM 2021 – questão 178 – prova rosa) O instrumento de percussão conhecido como triângulo é composto por uma barra fina de aço, dobrada em um formato que se assemelha a um triângulo, com uma abertura e uma haste, conforme ilustra a Figura 1.

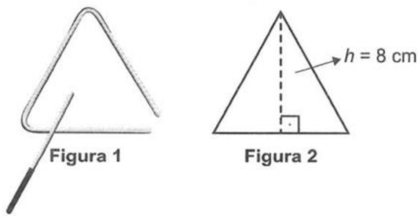


Figura 1 Figura 2

Uma empresa de brindes promocionais contrata uma fundição para a produção de miniaturas de instrumentos desse tipo. A fundição produz, inicialmente, peças com o formato de um triângulo equilátero de altura h, conforme ilustra a Figura 2. Após esse processo, cada peça é aquecida, deformando os cantos, e cortada em um dos vértices, dando origem à miniatura. Assum que não ocorram perdas de material no processo de produção, de forma que o comprimento da barra utilizada seja igual ao perímetro do triângulo equilátero representado na Figura 2. Considere 1,7 como valor aproximado para $\sqrt{3}$. Nessas condições, o valor que mais se aproxima da medida do comprimento da barra, em centímetro, é

a) 9,07
b) 13,60
c) 20,40
d) 27,18
e) 36,24

Chamando o lado do triangulo de L:

$8 = (L\sqrt{3})/2$

$16 = L\sqrt{3}$

$L = 16/\sqrt{3}$

$L = (16\sqrt{3})/3$

O perímetro do triangulo é igual 3L, $\sqrt{3} = 1,7$

3L = 16x1.7 = 27.2

Letra D

3) Uma represa no formato retangular possui dimensões de 30 metros por 40 metros. Qual será a distância percorrida por uma pessoa que atravessa essa represa pela sua diagonal?

A) 45 metros
B) 50 metros
C) 65 metros
D) 70 metros

E) 80 metros

$D^2 = 30^2 + 40^2$

$D^2 = 900 + 1600$

$D^2 = 2500$

$D = \sqrt{2500}$

D = 50 m

4) (IFG 2020) O desmatamento tem sido uma problemática crescente no Brasil. Supondo que, ao efetuar o desmatamento de uma determinada área, um madeireiro se depara com uma árvore que já se encontra quebrada; parte do tronco da árvore que se manteve fixa ao solo mede 3 m e forma com este um ângulo de 90º; a ponta da parte quebrada que toca o solo encontra-se a 4 m de distância da base da árvore. Qual era a altura da árvore antes de se quebrar:

A) 5 m
B) 7 m
C) 8 m
D) 9 m

$$A^2 = b^2 + c^2$$
$$A^2 = 3^2 + 4^2$$
$$A^2 = 9 + 16$$
$$A = \sqrt{25}$$
$$A = 5.$$

A altura será A + 3, logo 5+3 = 8

5) Qual é o polígono convexo cujo número de diagonais é o dobro do número de lado?

$$d = 2n$$
$$(n\,(n - 3))\,/2 = 2n$$
$$n\,(n - 3) = 4n$$
$$n^2 - 3n - 4n = 0$$
$$n^2 - 7n = 0$$
$$n\,(n - 7) = 0.$$

Como a quantidade de lados deve ser um número natural, temos n = 7, ou seja, o polígono e um heptágono

6) Seja um octógono convexo formado pelos pontos A, B, C, D, E, F, G e H. Quantas são as diagonais que não contêm os vértices A nem D?

O total de diagonais de um octógono convexo é $(8(8 - 3))\,/2 = 20$. Destas, $8 - 3 = 5$ partem do vértice A e a mesma quantidade do vértice D, mas não podemos nos esquecer que uma delas parte de A e de D. Assim, a quantidade de diagonais que não contêm os vértices A nem D é $20 - 5 - 5 + 1 = 11$.

7) De dois polígonos convexos, um tem a mais que o outro 6 lados e 39 diagonais. Então, a soma total do número de vértices e de diagonais dos dois polígonos é igual a:

a) 63. b) 65. c) 66. d) 70. e) 77.

$$d1 - d2 = 39$$
$$[(n + 6)\,(n + 6 - 3)]\,/2 - [n\,(n - 3)]\,/2 = 39$$
$$(n + 6)\,(n + 3) - n\,(n - 3) = 78$$
$$n^2 + 6n + 3n + 18 - n^2 + 3n = 78$$
$$12n + 18 = 78$$
$$n = 5$$

Os polígonos são o pentágono, cujo número de diagonais é $[5(5 - 3)]\,/2 = 5$, e o undecágono, cujo número de diagonais é $[11(11 - 3)]\,/2 = 44$. Sendo assim, a soma pedida é $5 + 11 + 5 + 44 = 65$

8) A soma do número de diagonais de dois polígonos convexos é 142 e a diferença entre o número de lados é 1. Quantos lados tem estes polígonos?

Se a diferença entre o número de lados é 1, vamos chamar as quantidades de lados de n e n + 1. Temos então:

$$d1 + d2 = 142$$

$$[(n + 1)(n + 1 - 3)]/2 + [n(n - 3)]/2 = 142$$

$$(n + 1)(n - 2) + n(n - 3) = 284$$

$$n^2 - 2n + n - 2 + n^2 - 3n = 284$$

$$2n^2 - 4n = 286$$

$$n^2 - 2n = 143$$

$$n(n - 2) = 13 \cdot 11$$

$$n = 13.$$

Portanto os polígonos têm 13 e 14 lados

9) A diferença entre o número de diagonais de dois polígonos convexos é 85 e o número de lados de um é o triplo do número de lados do outro. Quais são estes polígonos?

Vamos chamar a quantidade de lados destes polígonos de n e 3n. Como a diferença entre o número de diagonais é 85, temos:

$$d1 - d2 = 85$$

$$[3n(3n - 3)]/2 - [n(n - 3)]/2 = 85$$

$$9n^2 - 9n - n^2 + 3n = 170$$

$$8n^2 - 6n = 170$$

$$4n^2 - 3n = 85$$

$$4n^2 - 3n + 9/16 = 85 + 9/16$$

$$(2n - 3/4)^2 = 1369/16$$

$$2^2 - 3/4 = \pm 37/4$$

$$n = (\pm 37 + 3)/8$$

Como n deve ser um número natural, n = 5, ou seja, os polígonos são o pentágono e o pentadecágono.

12.5. Relatório Aula 8

Nesse encontro realizamos a aula no Laboratório de Ensino de Matemática da Unioeste, onde estiveram presentes 7 alunos. Primeiramente recebemos os alunos na sala de aula e em seguida os direcionamos ao Laboratório, por isso a aula teve início apenas às 8h20. Destinamos o primeiro momento para tirar dúvidas dos alunos referentes à lista de exercícios sobre o conteúdo de polinômios que foi proposta na aula anterior, porém como grande parte dos alunos que estavam nesse encontro não estavam presentes no anterior, foram expostas poucas dúvidas. Logo em seguida demos abertura ao conteúdo preparado para o encontro: Polígonos. Inicialmente apresentamos a definição, os elementos que o compõem, a diferença entre polígonos convexos e côncavos e a nomenclatura de polígonos de acordo com a quantidade de lados que possuem. Os alunos não tiveram muitas dificuldades em compreender esses conceitos

Utilizamos o geoplano como recurso didático, propondo que os alunos representassem diferentes polígonos nesse material. Essa atividade foi bem recebida pelos alunos, que se mostraram bem animados e entrosados com a manipulação do Geoplano.

Figura 33: Atividade no Geoplano

Fonte: Acervo dos autores (2023)

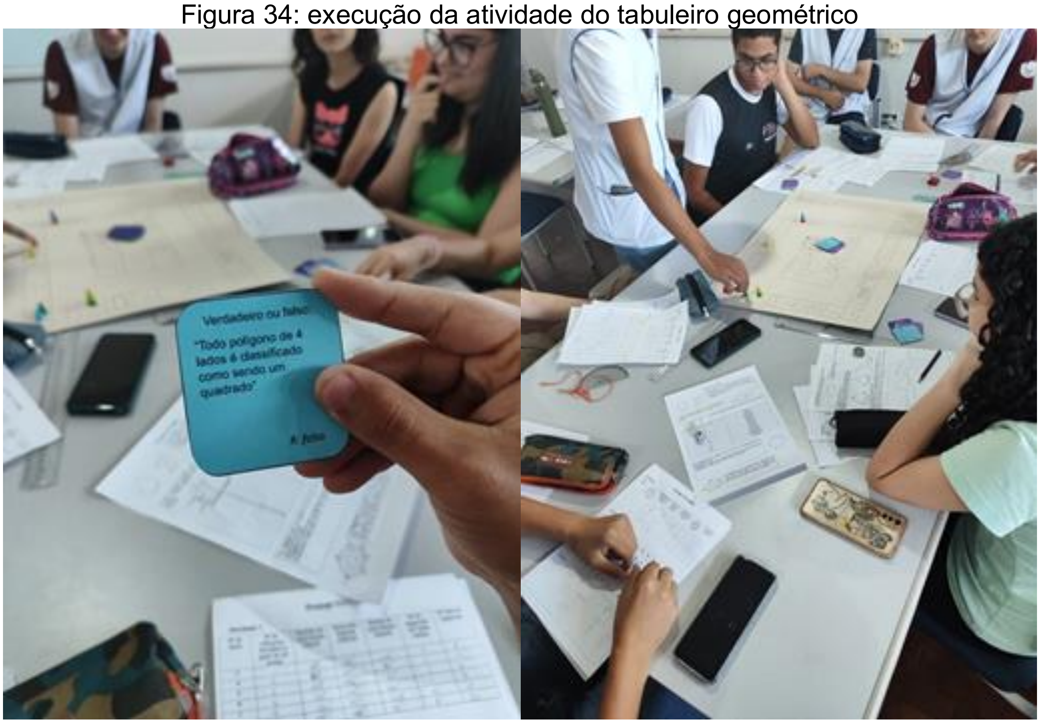
Apresentamos as condições para que um polígono seja regular e as fórmulas para encontrar o número de diagonais por vértice e total, soma dos ângulos internos, medida de cada ângulo interno e externo, número de triângulos formados ao traçar as diagonais de um vértice de um polígono dependendo do número de lados. Pedimos então que preenchessem uma tabela para completar utilizando essas fórmulas em relação a diferentes polígonos regulares. Nesse momento alguns alunos apresentaram algumas dificuldades e acabaram se confundindo em relação a alguns conceitos, como a fórmula para encontrar a medida do ângulo e a fórmula para encontrar a soma dos ângulos internos. Acompanhamos os alunos individualmente suprindo as dúvidas e explicando novamente os conceitos que ainda não haviam conseguido fixar bem. Ao fim resolvemos no quadro alguns dos itens dessa atividade juntamente com os alunos, ao mesmo tempo verificando se ainda havia dúvidas em relação a algo.

Em seguida, exploramos os tipos de triângulos, suas classificações de acordo com as medidas de seus lados e ângulos internos. Utilizamos novamente o geoplano, solicitando que os alunos representassem diferentes triângulos e os classificassem de acordo com as condições recém apresentadas. Os alunos tiveram facilidade em fazer as classificações dos triângulos que representaram.

Exploramos os conceitos acerca do Teorema de Pitágoras, utilizando diferentes exemplos e propondo exercícios para encontrar as medidas de lados desconhecidos de triângulos retângulos. Os alunos já tinham um bom domínio desse conteúdo, então não tiveram dificuldades durante o desenvolvimento dessa parte da aula.

Por fim, utilizamos um jogo de tabuleiro elaborado por nós mesmos para fixação do conteúdo com objetivo de gerar um momento de descontração. Os alunos se mostraram bem animados e interessados no decorrer do jogo, era visível que estavam bem agitados num clima de competição.

Figura 34: execução da atividade do tabuleiro geométrico



Fonte: Acervo dos Autores (2023)

Em alguns momentos do jogo era necessário responder algumas perguntas relacionadas ao conteúdo, em alguns momentos estavam eufóricos e respondiam as perguntas sem pensar muito e acabavam cometendo erros, mas na maioria delas mostraram ter entendido bem os conceitos apresentados na aula. Às 11h40 ainda não tinham finalizado o jogo, então comunicamos que já poderiam sair da aula, porém como estavam bem entrosados e movidos pela vontade de ganhar, optaram em continuar na sala até terminar o jogo que foi finalizado 10 minutos depois.

13. Encontro 9

13.1. Plano de Aula 18/11/2023

Público-alvo: Alunos do Promat

Conteúdos: Semelhança de triângulos, área, perímetro e circunferência

Objetivo geral:

Compreender como encontrar a semelhança entre os triângulos

Relembrar como calcular área e perímetro

Objetivo Específico:

Reconhecer a semelhança entre os triângulos (Ângulo Ângulo, Lado lado lado, Lado Ângulo Lado)

Comparar as medidas das circunferências da Torre de Hanói

Tempo de execução: Uma aula do Promat (3H40MIN)

Recursos didático: Folha sulfite, quadro, giz, projetor, tangram, torre de Hanoi, trena, barbante, régua

Encaminhamento Metodológico:

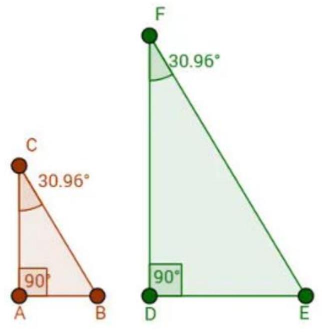
Iremos começar a aula conversando com os alunos sobre a lista de atividades proposta na aula passada sobre polígonos. Nesse momento, iremos tirar as dúvidas que os alunos apresentarem. Em seguida, iremos explicar, por meio de slides, a relação de semelhança entre triângulos para os casos: Ângulo, Ângulo (AA); Lado, Lado, Lado (LLL) e Lado, Ângulo, Lado (LAL).

Definição:

A semelhança de triângulos é uma característica que pode ou não acontecer entre dois triângulos. Ela está relacionada com os lados e os ângulos dos triângulos. Dois triângulos são semelhantes quando possuem ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais. Para encontrar as semelhanças nos triângulos, temos três critérios:

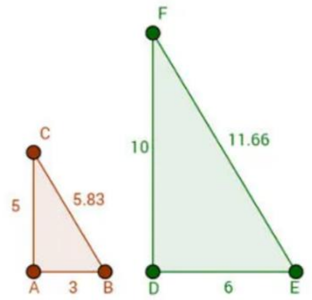
Critérios de semelhança:

Ângulo, Ângulo (AA): Dois triângulos são semelhantes se eles possuírem dois ângulos correspondentes congruentes, ou seja, iguais:



Não é necessário verificar o terceiro ângulo. Basta que os outros dois ângulos sejam congruentes.

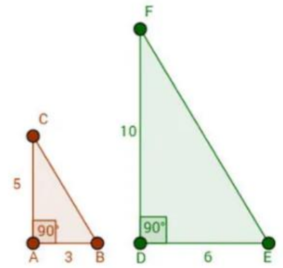
Lado, Lado, Lado (LLL): Se as razões entre os lados correspondentes dos dois triângulos forem iguais, então eles são semelhantes. Essa propriedade nos possibilita verificar se um par de triângulos é semelhante ou não sem analisar seus ângulos.



Na figura acima podemos ver que a razão entre os lados é a mesma:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{1}{2}$$

Lado, Ângulo, Lado (LAL): Se temos dois triângulos com dois pares de lados proporcionais e o ângulo entre esses lados possui a mesma medida nos dois triângulos, então temos que eles são semelhantes



$$\frac{AB}{DE} = \frac{CA}{FD} = \frac{1}{2}$$

Nesse exemplo, o ângulo de 90º está ao meio dos lados proporcionais.

Depois de mostrar a relação de semelhança, iremos passar um vídeo (cujo link está logo abaixo) em que é falado sobre uma das relações de semelhança aplicada em um jogo de bilhar.

Disponível em: https://youtu.be/b_FFG4_y-LQ?si=DIpRDib3ZYzPxzW. Acesso em 14 nov. 2023:

Em seguida, iremos falar sobre área e perímetro com as definições nos slides que irão conter imagens de cada um deles.

Definição:

Área: A área de uma figura é a medida equivalente à sua superfície e, para calcularmos a área de um retângulo, utilizamos a base(b) e a altura(h) do polígono.

Falaremos de algumas medidas utilizadas para calcular a área sendo elas:

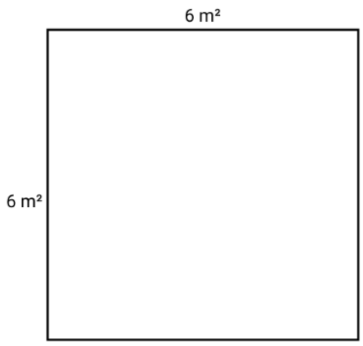
Quadro 4: medidas de área

Km²	Quilometro quadrado
Hm²	Hectômetro quadrado
Dam²	Decâmetro quadrado
M²	Metro quadrado
Dm²	Decímetro quadrado
Cm²	Centímetro quadrado
Mm²	Milímetro quadrado

As medidas são elevadas ao quadrado pois elas advêm de uma multiplicação de dois lados de um retângulo medidos nas mesmas unidades.

Exemplo:

Para calcular a área do quadrado iremos multiplicar a base (b) pela altura (h)



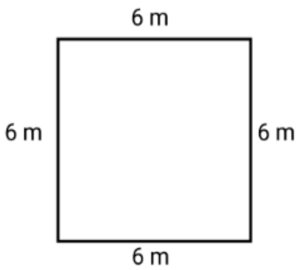
Nesse exemplo então a área é A=6m.6m=36m²

Perímetro:

O cálculo do perímetro é a soma das medidas de todos os lados da figura

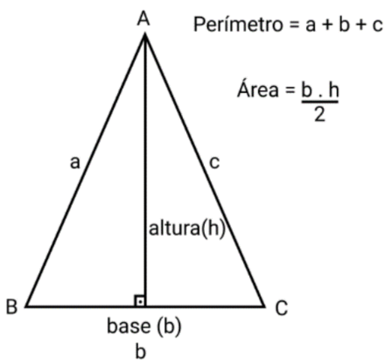
Exemplo:

Para descobrirmos o perímetro fazemos 6+6+6+6, então saberemos que o perímetro dessa imagem é 24m



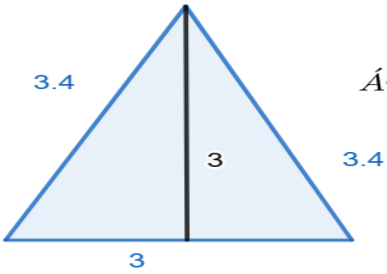
Depois da explicação iremos falar sobre a área e o perímetro do triângulo, quadrado e retângulo, e mostraremos imagens pelo slide:

Triângulo:



Para encontrar a área do triangulo é necessário multiplicar a base(b) pela medida da altura(h) e o seu resultado multiplicamos por 2 (dois), e o perímetro é a soma de todos os seus lados

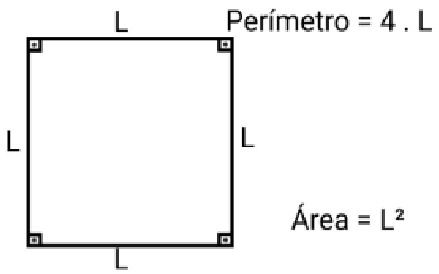
Exemplo:



$$Área : \frac{3.3}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$$

$$Perímetro : 3 + 3,4 + 3,4 = 9,8$$

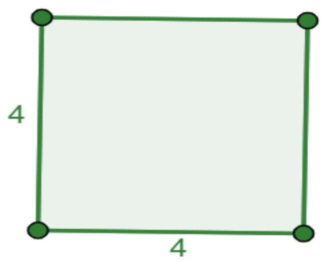
Quadrado:



A área do quadrado é calculada pela multiplicação dos lados, como sabemos que o quadrado tem os seus lados com a mesma medida então elevamos o lado ao quadrado que corresponde ao mesmo que L.L

Perímetro é o valor do lado multiplicado por 4

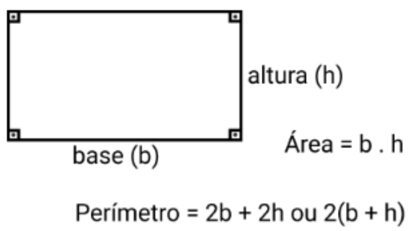
Exemplo:



$$Área : 4^2 = 16$$

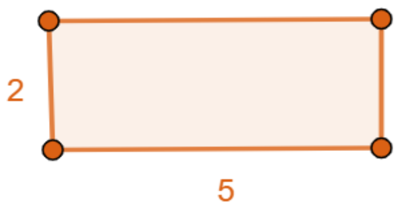
$$\text{Perímetro} : 4.4 = 16$$

Retângulo:



Área: Para calcular a área do retângulo basta multiplicar a base(b) pela altura(h)

Perímetro: O perímetro de um retângulo é encontrado multiplicando a base por dois e somando com a multiplicação da altura por dois



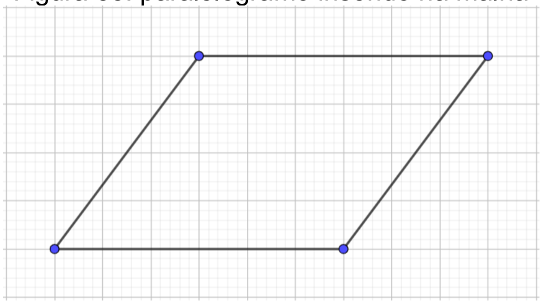
$$Área : 5.2 = 10$$

$$\text{Perímetro} : 2.5 + 2.2 = 10 + 4 = 14$$

Exemplo:

Depois de apresentar a fórmula de perímetro e área do retângulo falaremos que para se calcular a área e perímetro de um paralelogramo utilizamos o mesmo método e mostraremos um exemplo:

Figura 35: paralelogramo inserido na malha



Fonte: Acervo dos autores (2023) com Geogebra

Na imagem acima, temos que a base do paralelogramo mede 6 unidades e sua altura é de 4 unidades. Por meio do teorema de Pitágoras, também descobrimos que os lados laterais do paralelogramo medem 5 unidades. Sendo assim:

Área = 6 . 4 = 24

Perímetro = 6 + 5 + 6 + 5 = 22

Em seguida, pediremos para os alunos formarem duplas e entregaremos para cada dupla um Tangram e perguntaremos se alguém já o conhecia e contaremos uma das lendas sobre o seu surgimento.

Tangram:

Um imperador chamado Tan teria quebrado o seu espelho quadrado em sete partes. Na tentativa de concertar o espelho, percebeu que poderia formar muitas figuras diferentes com os pedaços, ficou impressionado com o desafio e o reproduziu como jogo.

Pediremos para que os alunos separem as peças iguais e que calculem a área de cada uma das peças utilizando a régua e ao final pediremos para que eles montem e calcule a área do tangram inteiro montado, para isso serão necessários que os alunos utilizem as fórmulas que foram passadas até o momento na aula. Enquanto os alunos calculam as áreas e os perímetros passaremos nas carteiras para tirar suas dúvidas, depois de todos terem resolvido o exercício, iremos pedir se um ou dois alunos queiram resolver no quadro, caso ninguém queira iremos fazer a correção da atividade proposta.

Com a atividade resolvida começaremos outras duas atividades para que os alunos resolvam:

Atividade 1: Calcule a área das figuras planas a seguir de acordo com as medidas dadas em cada alternativa.

a) Quadrado com lado de 20 cm.
b) Retângulo com 15 cm de base e 10 cm de altura
c) Triângulo com 6 cm de base e 12 cm de altura

Atividade 2: Juliana possui dois tapetes de mesma área. O tapete quadrado possui lado de 4 m e o tapete retangular tem altura de 2 m e base de 8 m. Qual tapete apresenta o maior perímetro?

a) O tapete quadrado
b) O tapete retangular
c) Os perímetros são iguais

Disponibilizaremos um tempo para que os alunos resolvam as questões e em seguida pediremos para eles como as resolveram e se querem resolver no quadro, caso ninguém queira ir até o quadro, resolveremos e depois começaremos a falar sobre a circunferência utilizando o geogebra, mostraremos o que é o raio de uma circunferência e o seu diâmetro.

Definição:

Raio: Raio é um segmento que liga o centro até qualquer ponto da extremidade de uma circunferência.

Diâmetro: Diâmetro é um segmento de reta que passa pelo centro da figura ligando uma extremidade até a outra

Depois de definirmos o que é o raio e o diâmetro pediremos se os alunos lembram como que calcula o comprimento de uma circunferência

Iremos também definir como encontrar a sua área e o seu comprimento através do geogebra

Comprimento: O comprimento é a medida do entorno da circunferência, a medida do comprimento é proporcional ao raio, isso nos diz que conforme o raio cresce o comprimento também crescerá, tendo então a sua fórmula sendo:

$$\boldsymbol{C = 2.\pi.r}$$

π = constante 3,14

r= raio da figura

Área da circunferência: Determina o tamanho da superfície da figura, sua fórmula é:

$$A = \pi r^2$$

π= constante 3,14

r= medida do raio

Logo após a definição iremos entregar uma peça da torre de Hanoi para cada aluno, junto com um pedaço de barbante e uma tesoura e iremos pedir para que os alunos preencham a tabela com pelo menos três medidas diferentes pediremos também que eles possam trocar entre eles as peças para que todos cheguem em três medidas com peças de tamanho diferente:

	Raio	**Diâmetro**	**Comprimento**	**Área**
1º				
2º				
3º				

Com a tabela construída pediremos se os alunos conseguiram entender a forma de resolução para cada item, em seguida dividiremos a turma em dois grupos e falaremos que iremos fazer um jogo com eles que consiste em eles passear pelo campus a procura de quatro figuras sendo elas quadrado, retângulo, triângulo e circunferência depois de retirar as medidas e calcular a sua área e o seu perímetro, sendo assim eles precisariam tirar uma foto do objeto e medir com a trena que será entregue, com isso finalizaríamos a aula. (30min)

13.2. Material Entregue

Apostila:

Relação de Semelhança:

Ângulo Ângulo: Dois triângulos são semelhantes se eles possuírem dois pares de ângulos congruentes;

Lado Lado Lado: Se as razões entre os lados correspondentes dos dois triângulos forem iguais, então eles são semelhantes. Essa propriedade nos possibilita verificar se um par de triângulos é semelhante ou não sem analisar seus ângulos

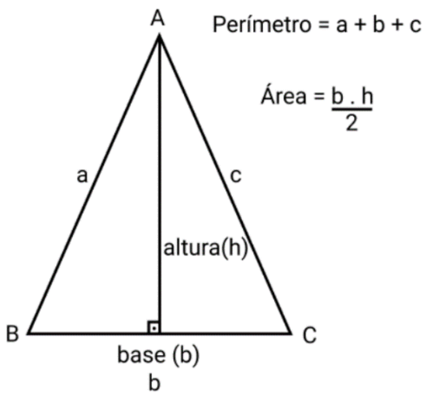
Lado Ângulo Lado: Se temos dois triângulos com dois pares de lados proporcionais e o ângulo entre esses lados possui a mesma medida nos dois triângulos, então temos que eles são

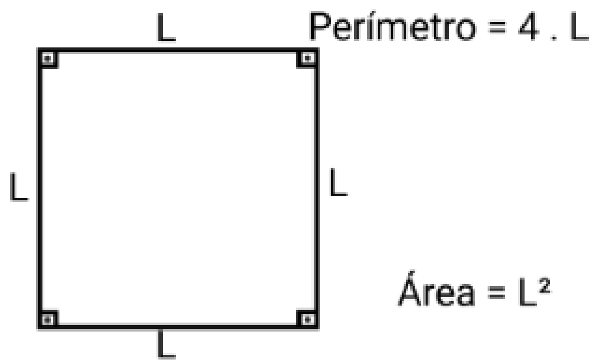
Área e Perímetro:

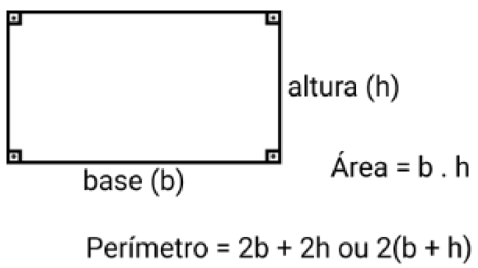
semelhantes

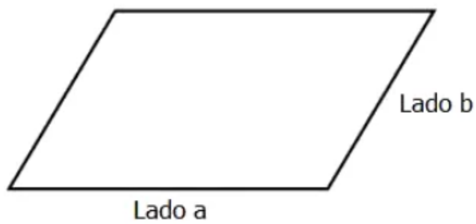
Área: A área de uma figura é a medida equivalente à sua superfície, e para calcularmos a área geralmente utilizamos a base(b) pela altura(h) do objeto.

Perímetro: O cálculo do perímetro é a soma das medidas de todos os lados da figura.









=

Circunferência:

Raio: Raio é um segmento que liga o centro até qualquer ponto da extremidade

Diâmetro: Diâmetro é um segmento de reta que passa pelo centro da figura liga uma extremidade até a outra

Comprimento: O comprimento é a medida do entorno da circunferência. A medida do comprimento é proporcional ao raio. Sendo assim, quanto maior for o raio, maior será o comprimento da circunferência, tendo então a sua fórmula sendo:

$$\boldsymbol{C = 2.\pi.r}$$

π = constante 3,14

r= raio da figura

Área: Determina o tamanho da superfície da figura, sua fórmula é:

$$A = \pi r^2$$

π= constante 3,14

r= medida do raio

Atividades em sala:

1- Calcule a área das figuras planas a seguir de acordo com as medidas dadas em cada alternativa.

a) Quadrado com lado de 20 cm.
b) Retângulo com 15 cm de base e 10 cm de altura.
c) Triângulo com 6 cm de base e 12 cm de altura.

2- Juliana possui dois tapetes de mesma área. O tapete quadrado possui lado de 4 m e o tapete retangular tem altura de 2 m e base de 8 m. Qual tapete apresenta o maior perímetro?

a) O tapete quadrado.
b) O tapete retangular.
c) Os perímetros são iguais.

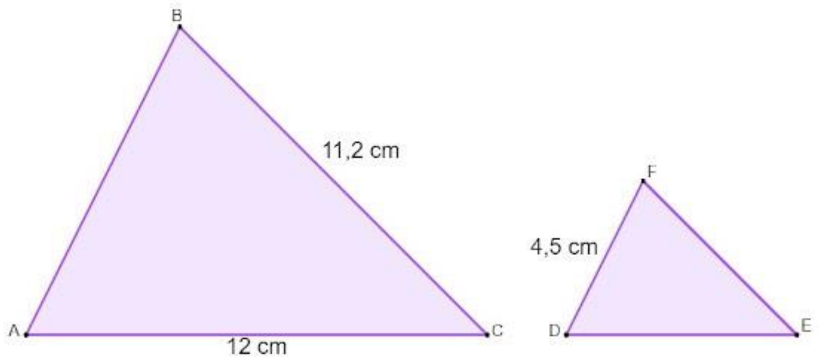
3- Atividade com a torre de Hanói:

	Raio	**Diâmetro**	**Comprimento**	**Área**
1º				
2º				
3º				

4- Medida das figuras encontradas pelo campus:

13.3. Lista de Exercícios

1- Os triângulos ABC e DFE são triângulos semelhantes. Sabendo que a razão de semelhança entre os triângulos ABC e DFE é 2, então a soma do perímetro desses triângulos é igual a:



a)16,1
b)32,2
c)36,4
d)48,3
e)52,9

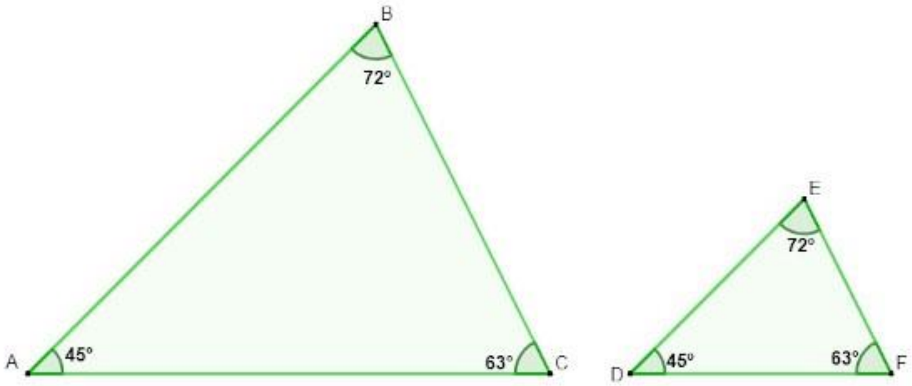
AB=2FD
AB=2x4,5
AB=9

O perímetro do triângulo maior é: PM=12+11,2+9=32,2

Como os lados do triângulo menor tem metade da medida dos lados do triângulo maior seu perímetro será (32,2) /2=16,1

A soma dos perímetros dos triângulos é dada por: 32,2+16,1=48,3

2- Analisando os triângulos a seguir, podemos afirmar que:

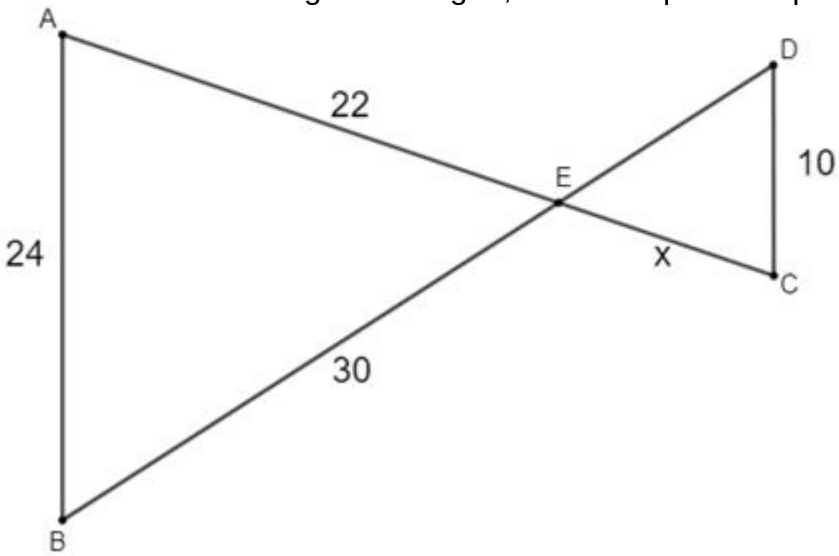


a) Eles são semelhantes por terem lados congruentes e ângulos congruentes.

b) Eles são semelhantes por terem ângulos congruentes.
c) Eles são congruentes pelo caso lado, lado e lado.
d) Eles são congruentes pelo caso ângulo, lado e ângulo.
e) Eles não são congruentes pelo caso ângulo, ângulo e ângulo.

R: Podemos perceber que eles possuem três ângulos iguais, porém a medida dos lados não é a mesma, então eles são semelhantes pelo fato de possuírem 3 ângulos congruentes.

3- Analisando os triângulos a seguir, sabendo que AB é paralelo a DC, qual é o valor de x?



R: Por semelhança de triângulos, temos que:

$$x22=1024$$

$$24x=10\cdot 22$$

$$24x=220$$

$$x=220/24$$

$$x\approx 9,2$$

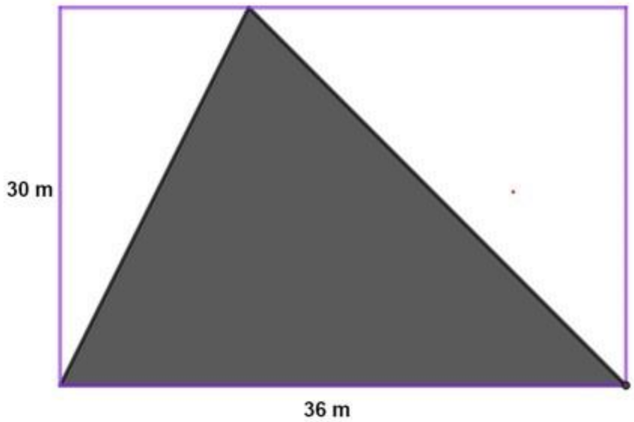
4- Na casa de Marcelo, há um quintal no formato de um quadrado com lado medindo 6 metros. Nesse quintal será colocado um tablado de formato também quadrado, com 2 metros de lado. O restante do quintal será todo cimentado. Quanto mede a área desse terreno que será cimentada?
R:

$$\text{Quintal}=6\cdot 6 = 36m^2$$

$$\text{Tablado}=2\cdot 2 = 4m^2$$

$$A=36-4 = 32m^2$$

5- Qual é a área da parte branca do retângulo da figura a seguir?



a. 450m²

b. 490m²

c. 540m²

d. 750m²

e. 1080m²

Sabemos que a área do retângulo é igual ao produto da base pela altura e que a área do triângulo é igual a metade do produto entre a base e altura. Sendo assim, sabemos que o triângulo tem a metade da área do retângulo, logo podemos concluir que a parte branca é a outra metade da área do retângulo, ou seja, a área branca tem a mesma medida que a área do triângulo.

A=30x362

A=10802

A=540m²

6- (ENEM 2016) Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na Figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na figura A) cujo comprimento seja 7m maior do que a largura.

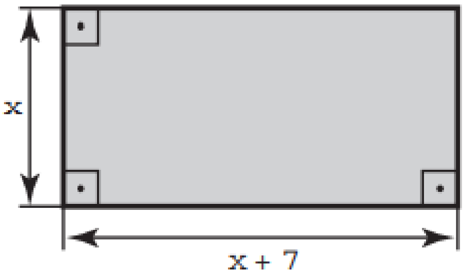


Figura A

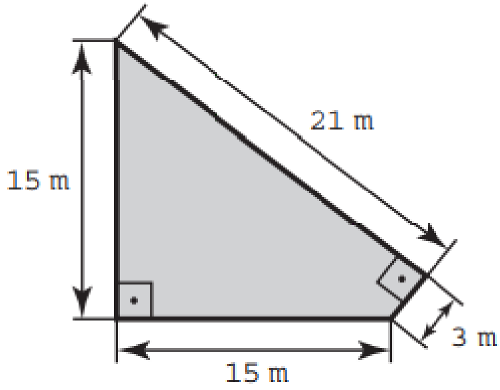


Figura B

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metros, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a:
a) 7,5 e 14,5.
b) 9,0 e 16,0.
c) 9,3 e 17,0.
d) 10,0 e 17,0.
e) 13,5 e 20,5.

Primeiramente, dividimos a figura B em dois triângulos B1 e B2, um com altura de 21m e base de 3m e outro com altura e base medindo 15m.
Assim, temos que a área da figura A = área da figura B = B1+B2

$$x(x+7)=15x152+21x32=144$$

Fatorando 144, temos que:

$$x(x+7)=9x16$$

$$x(x+7)=9(9+7)$$

Assim, as medidas do retângulo devem ser 9m e 16m.

7- Na fazenda de Seu Sebastião, o cultivo de milho é feito em uma área delimitada por uma circunferência. Para evitar invasões de animais na plantação, ele decidiu cercá-la com arame farpado, dando 4 voltas completas. Sabendo que o diâmetro da circunferência é de 1km, a quantidade mínima de arame necessária para cercar essa área é igual a: (Use $\pi=3$)

a) 3km
b) 6km
c) 12km
d) 20km
e) 24km
$c=2\pi r$ $c=2\cdot 3\cdot 0{,}5$ $c=3km$ $3x4= 12km$

8- (Enem 2019) Em um condomínio, uma área pavimentada, que tem a forma de um círculo com diâmetro medindo 6 m, é cercada por grama. A administração do condomínio deseja ampliar essa área, mantendo seu formato circular e aumentando, em 8 m, o diâmetro dessa região, mantendo o revestimento da parte já existente. O condomínio dispõe, em estoque, de material suficiente para pavimentar mais 100 m² de área. O síndico do condomínio avaliará se esse material disponível será suficiente para pavimentar a região a ser ampliada.
A conclusão correta a que o síndico deverá chegar, considerando a nova área a ser pavimentada, é a de que o material disponível em estoque:
(Use $\pi = 3$)

A) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 21 m².
B) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 24 m².
C) será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 48 m².
D) não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 108 m².
E) não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 120 m².

A área inicialmente possuía um raio de 3 metros. Como o diâmetro será aumentado em 8m, essa região terá 14 metros de diâmetro, ou seja, 7 metros de raio. Calculando a diferença entre essas áreas:
$A1 = \pi r^2 = 3 \cdot 3^2 = 27$ m²
$A2 = \pi r^2 = 3 \cdot 7^2 = 147$ m²
$147 - 27 = 120$ m²
Logo, a quantidade de material não será suficiente, pois a área da nova região a ser pavimentada mede 120 m².

13.4. Referências

MUNDO EDUCAÇÃO Disponível em: https://exercicios.mundoeducacao.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-semelhanca-triangulos.htm#resposta-8068. Acesso em: 14 nov. 2023.

DESCOMPLICA Disponível em:https://descomplica.com.br/gabarito-enem/questoes/2016/segundo-dia/um-senhor-pai-de-dois-filhos-deseja-comprar-dois-terrenos/ Acesso em: 14 nov. 2023

13.5. Relatório Aula 9

No dia dezoito do mês de novembro de dois mil e vinte e três, nos reunimos nas dependências da UNIOESTE para realizar o nono encontro do PROMAT. Compareceram à essa aula 6 alunos de nossa turma. O assunto que foi abordado na aula foi sobre relação de semelhança, área e perímetro. Para fazermos uma aula em um espaço diferenciado utilizamos a sala do LEM (Laboratório de Ensino de Matemática), no começo não estávamos conseguindo projetar os slides, então começamos a aula sem a utilização deles.

Percebendo então que os alunos estavam dispersos, resolvemos juntarmos duas mesas e nos reunirmos em volta dela, assim os professores e os alunos ficavam mais próximos e conseguimos ter uma participação melhor deles em sala e, também utilizar os slides apresentando-o através de um notebook.

Falamos sobre a relação de semelhança e passamos um vídeo em que mostrava uma das relações em um jogo de sinuca. Nesse momento os alunos comentaram sobre o vídeo e começaram a participar mais da aula, logo começamos a falar sobre área e perímetro, eles participaram bastante e sempre respondiam quando algo era perguntado. Resolveram os exercícios propostos e interagiram com os seus colegas para saber se a respostas eram iguais ou não.

Quando falamos sobre o Tangram, tivemos alunos que não conheciam e outros que já tinham visto no colégio. Apresentamos a lenda sobre ele e passamos a atividade proposta no plano. Ao finalizar a atividade, ocorreu uma discussão entre os alunos em que eles comentaram quais foram as linhas de raciocínio que os levaram à resolução do problema e deixamos um tempo para eles brincarem e conhecer o material.

Na volta do intervalo, começamos a falar sobre a circunferência perguntamos para os alunos se eles lembravam o que era um diâmetro, raio e o comprimento. Com o auxílio do Geogebra mostramos o que era, a forma de se encontrar a área e o comprimento. A atividade nesse momento era sobre a torre de Hanoi, o jogo que foi utilizado nessa atividade era feito de EVA e suas peças eram na forma de circunferências, assim pedimos que os alunos escolhessem uma peça para calcular a área e o seu comprimento. Após isso, sugerimos trocar com os colegas até que cada um tivesse calculado pelo menos três circunferências diferentes.

No fim dessa atividade, eles comparam suas respostas com os colegas que fizeram com a mesma circunferência, e foi nesse momento que fizemos a proposta de fazer uma atividade diferenciada, em que passamos ao aluno a liberdade deles calcularem a área do que eles quiserem, desde que estivesse dentro do campus. Poderia ser um retângulo, quadrado, triângulo ou uma circunferência, essa atividade foi muito interessante, pois um dos alunos resolveu calcular a área de um dos canteiros de flores do campus. Tivemos alunos que escolheram calcular o relógio de sol, o sol que tem ao lado do sistema solar.

Figura 36: alunos e professores fazendo as medições necessárias

Fonte: acervo dos autores

Passamos em torno de 20 minutos, próximo ao final da aula, para realizar essa atividade, ao chegar na sala eles utilizaram as medidas que encontram para calcular a área dos objetos. Enquanto eles calculavam entregamos a lista de exercícios e assim finalizamos a aula.

14. Encontro 10

14.1. Plano de Aula 25/11/2023

Público-alvo: Alunos do Promat

Objetivo geral:

Promover um momento de interação entre os alunos do PROMAT a partir de uma gincana.

Objetivos Específico:

Fazer atividades divertidas com uso de atividades matemáticas pedagógicas

Promover a união dos alunos nessas atividades usando a matemática

Tempo de execução: Uma aula do Promat (3H40MIN)

Recursos didáticos: Folha sulfite, Tangram, Torre de Hanói, Jogo de dardos com alvo, balança, objetos com massas variadas, lixeira, bolas de plástico, varal de frações.

Encaminhamento Metodológico:

Gincana – 10º encontro do Promat

A gincana será realizada com todos os alunos que participaram das aulas do Promat ofertadas no segundo semestre de 2023, as quais foram ministradas pelos acadêmicos matriculados na disciplina de Metodologia e prática de ensino de Matemática – estágio supervisionado I.

A gincana será composta por oito estações distintas, cada uma sob a responsabilidade de um estagiário. Os alunos, que serão divididos em oito grupos, passarão pelas estações para realizar as atividades sugeridas. As atividades propostas estão descritas na sequência.

Estação 1 – Tangram (Sala 49)

Será disponibilizado para cada integrante do grupo um Tangram, então será solicitado que montem quadrados utilizando as peças do quebra cabeça. Para isso serão instruídos da seguinte forma:

1º Montar um quadrado com apenas 1 peça do Tangram;

2º Montar um quadrado com 2 peças do Tangram;

3º Montar um quadrado com 3 peças do Tangram;

4º Montar um quadrado com 4 peças do Tangram;

5º Montar um quadrado com 5 peças do Tangram;

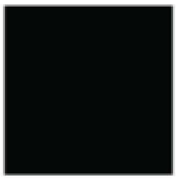
6º Montar um quadrado com as 7 peças do Tangram;

A pontuação será dada pela finalização das etapas. Quando todos os integrantes da equipe finalizarem a montagem do quadrado, a equipe ganha 1 ponto, por tipo de quebra cabeça montado. Isso significa que em algumas etapas existe a possibilidade de a equipe obter mais de 1 ponto.

Por exemplo na montagem do quadrado com duas peças, é possível montá-lo com dois triângulos pequenos ou 2 triângulos grandes. Caso a equipe utilize as duas formas, ganham 2 pontos.

Soluções e Pontuação

1º Quadrado com 1 peça: 1 ponto



2º Quadrado com 2 peças: até 2 pontos

3º Quadrado com 3 peças: 1 ponto.

4º Quadrado com 4 peças: até 3 pontos.

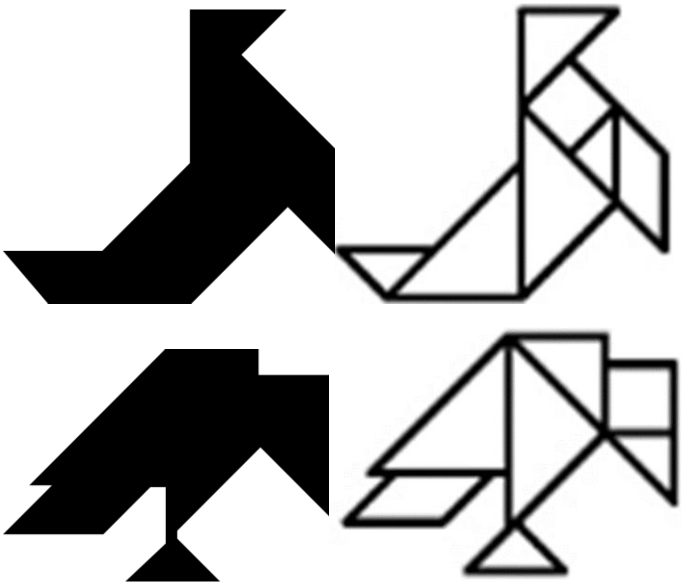
5º Quadrado com 5 peças: 1 ponto.

6º Quadrado com 7 peças: 1 ponto.

Total de Pontos: 9

A pontuação ainda pode ser revisada para ficar de acordo com o restante das equipes, talvez aumentar ou diminuir se necessário.

Em caso de sobra de tempo as equipes devem construir formas de animais com o Tangram, podendo obter pontos extras.



Estação 2 – Blackjack de polinômios (LIM)

Por meio do baralho adaptado para polinômios (já confeccionado), será jogado o jogo Blackjack (ou vinte e um) com os alunos. O baralho utilizado é composto pela junção de 4 baralhos menores que contêm as seguintes 36 cartas:

Ax, 2x, 3x, 4x, 5x, 6x, 7x, 8x, 9x, 10x, 10x, 10x

Ax2, 2x2, 3x2, 4x2, 5x2, 6x2, 7x2, 8x2, 9x2, 10x2, 10x2, 10x2

Ax3, 2x3, 3x3, 4x3, 5x3, 6x3, 7x3, 8x3, 9x3, 10x3, 10x3, 10x3

O número A que multiplica alguns monômios vale 1 ou 11 (o que for mais vantajoso para quem possui a carta). Nesse jogo, os participantes não competem entre si: todos jogam contra o *dealer*

O professor fixo na sala será o *dealer* do jogo. No início do jogo, serão entregues duas cartas para todos (inclusive ao *dealer*), as quais podem ser vistas por todos os jogadores. Ao receberem suas cartas, os participantes devem somar os monômios obtidos (só podemos somar monômios de mesma parte literal!). Na sua vez de jogar, o aluno escolhe se deseja comprar mais uma carta ou não. Ao comprar uma nova carta, soma-se o monômio presente nela com o restante das suas cartas. O intuito do jogo é fazer com que um dos 3 coeficientes do polinômio chegue o mais próximo possível de 21, mas sem extrapolar esse valor. Caso algum coeficiente seja maior do que 21, o jogador “estoura” e perde o jogo. Para ganhar o jogo, o participante deve:

- Não estourar
- Ter um coeficiente em seu polinômio que seja maior do que todos os coeficientes do polinômio do *dealer*

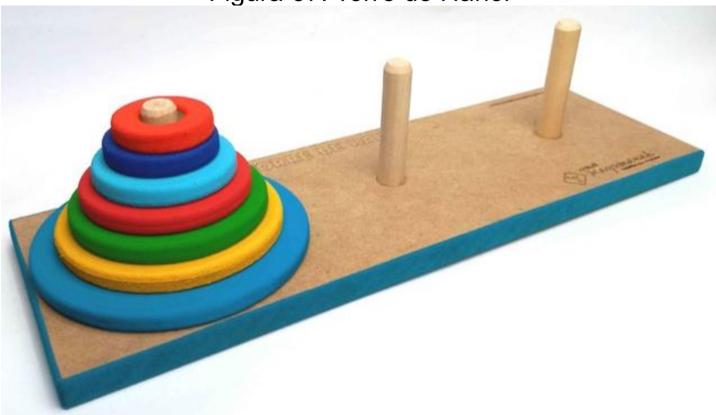
Se o *dealer* estourar, todos os participantes que ainda não estouraram ganham automaticamente.

A contabilização de pontos será feita da seguinte maneira: serão feitos 15 jogos com os alunos (considerando um grupo de 5 pessoas, serão feitas 3 rodadas. Se houver grupos com um número diferente de pessoas, jogamos de tal modo que aconteçam 15 jogos no total). Será anotada a quantidade de vitórias de cada grupo e, ao final, o grupo que tiver mais vitórias ganhará 9 pontos, o grupo em 2° lugar no número de vitórias ganha 8 pontos e assim por diante até que o último grupo ganhe 2 pontos.

Estação 3 – Torre de Hanói (Caracol)

Disponibilizaremos a cada grupo de alunos uma torre de Hanói, o objetivo será passar todas as peças do pino da extrema direita ao pino da extrema esquerda sem sobrepor uma determinada peça com uma peça maior.

Figura 37: Torre de Hanói



A primeira rodada será com apenas três discos e conforme os alunos concluírem a transposição de todas as peças, será adicionado mais um disco, e assim sucessivamente, até realizarem o desafio com 6 discos. Cada grupo terá o tempo máximo de 15 minutos para realizar o máximo de transposições que conseguirem. O grupo ganhará um ponto por cada peça que conseguir passar para o pino da extrema direita de maneira correta e a todos que conseguirem concluir todas as transposições em menos de 15 minutos, serão concedidos pontos extras seguindo a regra de 7 pontos para o grupo com menor tempo, 6 para o segundo menor tempo, 5 para o terceiro menor tempo e assim sucessivamente.

Estação 4 – Jogo de Dardos das Frações (Cantina)

Essa atividade é composta por 12 cartas contendo perguntas e problemas sobre frações. Cada grupo terá que escolher até 8 cartas para serem respondidas, sem saber quais perguntas estão nas cartas. Para cada acerto terão direito a lançar dois dardos em direção ao alvo, que tem pontuação variando entre 1 e 9 dependendo de onde o dardo for acertado, caso o dardo não seja acertado no alvo o grupo não pontuará e caso seja acertado no centro do alvo receberá 13 pontos, para pontuação de cada rodada será contado apenas o dardo que atingiu a maior pontuação entre os dois lançamentos.

Que expressão fracionária representa a parte colorida da seguinte figura?

a)8/4 b)1/2

c)4/2 d)4/4

No aniversário de Júlia, ela ganhou de presente um bolo e dividiu em 12 partes iguais, conforme a imagem:

Sabendo-se que Júlia comeu 3 pedaços, deu 1 para o seu sobrinho e 2 para sua irmã, a fração do bolo que restou foi:

a)12/6 b)3/12

c)1/2 d)1/5

v8-Éllen, Júlia, Andreia e Tereza brincam juntas com um jogo de cartas. Segundo as regras, vence o jogo quem obtiver a carta com o maior número. Veja, a seguir, as cartas retiradas pelas amigas.

É correto afirmar que a vencedora do jogo foi:

A) Éllen C) Andreia

B) Júlia D) Tereza

Qual afirmação é verdadeira:

a) $\frac{5}{10} = \frac{15}{20}$

b) $\frac{7}{3} = \frac{84}{30}$

c) $\frac{11}{5} = \frac{22}{10}$

d) $\frac{10}{5} = 5$

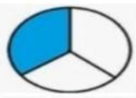
e) $\frac{6}{5} = \frac{48}{35}$

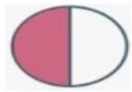
Que fração representa a seguinte figura?

a) $\frac{8}{20}$ b) $\frac{24}{8}$

c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{3}$

Fernanda, sozinha, comeu 2/3 de uma melancia. A imagem abaixo que representa a fração que sobrou da melancia é:

a) 

b) 

c) 

d) 

Em uma disputa entre carros de corrida um competidor estava a 2/7 de terminar a prova quando sofreu um acidente e precisou abandoná-la. Sabendo que a competição foi realizada com 56 voltas no autódromo, em que volta o competidor foi retirado da pista?

a) 16ª volta
b) 40ª volta
c) 32ª volta
d) 50ª volta

Uma sala de aula possui 24 alunos, sendo que 8 são meninas e 16 são meninos. A fração que representa a quantidade de meninas em relação ao todo é:

A) 1/3

B) 1/4

C) 2/3

D) 1/2

E) 4/3

Uma herança será repartida entre 3 herdeiros. Mariana é uma das herdeiras, e ficará com 1/4 dessa herança. Matheus ficará com 2/5. O restante é de Jovair. Então a fração que representa a parte da herança de Jovair é:

A) 3/20

B) 7/20

C) 13/20

D) 7/10

E) 13/10

Julgue as afirmativas as seguir:
I – Toda fração imprópria é um número maior que 1.
II – Toda fração própria é um número menor que 1.
III – As frações 2/3 e 8/12 são equivalentes.
Marque a alternativa correta:
A) Somente a I é falsa
B) Somente a II é falsa
C) Somente a III é falsa
D) I e II são falsas.
D) Todas são verdadeiras

Pedro ganhou 70 reais de aniversário, gastou 2/5 desse valor na loja de brinquedos e 10 reais na sorveteria. Quanto ainda lhe resta?

a) 32

b) 38

c) 42

d) 48

e) 60

Determinado condomínio trocou seu reservatório de água, com capacidade para 15000 litros, por outro dois terços maior. Qual é a capacidade do novo reservatório?

a) 10000 l.

b) 15000 l.

c) 20000 l.

d) 25000 l.

e) 30000 l.

No final será somada a pontuação total de cada grupo com os lançamentos.

A pontuação para a gincana será definida de acordo com a pontuação de cada grupo no lançamento de dardos:

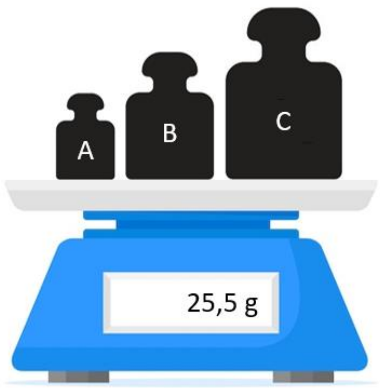
O grupo com a maior soma de pontos de lançamentos de dardos receberá 10 pontos para a gincana, o segundo grupo maior pontuador receberá 9 pontos, o terceiro receberá 8 pontos, o quarto 7 pontos, o quinto e sexto colocados 6 pontos e os dois grupos com as menores pontuações receberam 5 pontos.

Estação 5 – Atividade das Massas + sistemas (Lab. de Física)

Essa atividade tem como objetivo determinar a massa de objetos por meio de sistemas de equações. Será utilizado o Laboratório de Física, serão necessários para a gincana uma balança digital, e objetos com massas variadas.

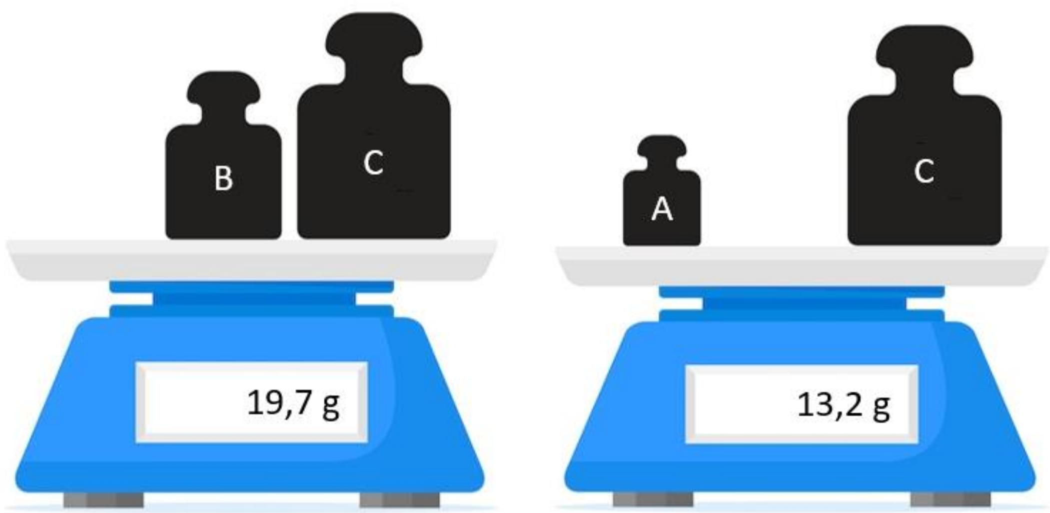
Por exemplo: Queremos descobrir a massa do peso C.

Figura 38: Disposição inicial dos pesos



Para isso podemos remover e adicionar outros objetos, desde que o peso que procuramos a massa não fique sozinho na balança. Então podemos mexer nos pesos A e B, enquanto C fica fixo.

Figura 39: Disposições permitidas



Nesse momento os participantes deverão montar um sistema de equações para descobrir o valor de C.

A+B+C=25,5B+C=19,7A+C=13,2

Resolvendo o sistema temos que *C=7,4 g*.

A pontuação será definida pela quantidade de sistemas resolvidos, então para isso serão disponibilizados kits com objetos com massas diferentes.

Estação 6: Desafio da Cesta + Equação do Segundo Grau (LEM)

Objetivo do Jogo:

Os alunos terão a oportunidade de praticar arremessos na cesta enquanto resolvem equações do segundo grau para ganhar pontos.

Materiais Necessários:

- Cesta de basquete (lixeira)
- Bolas de basquete (bolas de plástico)
- Lista de equações do segundo grau
- Quadro ou papel para anotar os pontos

Configuração do Jogo:

- Cada participante da equipe arremessará com o intuito de acertar a cesta.
- Caso o participante erre o arremesso, volta para o final da fila.
- Se o participante acertar, o jogador deverá resolver uma equação do segundo grau. Assim que o participante encontrar o resultado, a equipe acumula 1 ponto.
- O próximo jogador só poderá fazer o arremesso assim que o integrante que acertou resolver corretamente a equação do segundo grau.
- Todos os integrantes podem auxiliar no processo de resolução, porém devem permanecer nos lugares, ou seja, na fila para arremesso.
- A atividade ocorrerá pelo prazo de 15 minutos.
- Ao final, a pontuação será contabilizada com pontos ilimitados.

Estação 7 – Varal de frações (Hall de entrada)

A atividade do Varal de Frações é uma proposta que visa desenvolver a habilidade dos alunos em ordenar números, especialmente em suas formas fracionárias. Na dinâmica, os participantes terão a tarefa de organizar 13 cartas numeradas inicialmente empilhadas sobre uma mesa. O desafio consiste em colocar as cartas em ordem correta, considerando as representações fracionárias ou decimais presentes em cada uma delas.

O sistema de pontuação busca incentivar a precisão na ordenação. O time ganhará um ponto por cara em seu lugar correto. Estar, no "lugar correto" significa que as cartas diretamente à esquerda e diretamente à direita são, de fato, as corretas dentre todas as cartas. Para as cartas de ponta, basta apenas a carta subsequente (ou anterior) estar correta.

Essa abordagem recompensa não apenas a capacidade de ordenação, mas também a consistência na análise e posicionamento dos números representados nas cartas, isso pois, a cada carta colocada corretamente, o aluno tem meio caminho andado para outras duas cartas.

Para ilustrar como a pontuação funciona, considere o exemplo em que um participante ordena as cartas numeradas como $15,14,13,12,1$ como $15-14-13-1-12$. Como as cartas $15-14-13$ estão na ordem correta, ele recebe 1 ponto pela carta 15, que está corretamente na ponta e com o 14 à direita. O aluno recebe também um ponto pela carta 14, que está corretamente entre as cartas 15 e 13. No entanto, não recebe pontos por nenhuma outra carta, finalizando então com 2 pontos.

A atividade acaba se todas as cartas forem ordenadas corretamente ou ao final dos 15 minutos previstos para a atividade.

Estação 8 – Jogo dos quatro quatros (Parquinho)

A atividade consiste em construir os números de 0 até 10, sempre com 4 quatros (4 algarismos) utilizando apenas das quatro operações básicas da matemática, soma, subtração, multiplicação e divisão.

Cada número encontrado contará como um ponto.

As expressões que resolvem (mas não são únicas) de 0-10 são:

$$0 = 4 - 4 + 4 - 4$$

$$1 = \frac{44}{44}$$

$$2 = \frac{4 \cdot 4}{4 + 4}$$

$$3 = \frac{4 + 4 + 4}{4}$$

$$4 = \frac{4 - 4}{4} + 4$$

$$5 = \frac{(4 \cdot 4) + 4}{4}$$

$$6 = \frac{4 + 4}{4} + 4$$

$$7 = \frac{44}{4} - 4$$

$$8 = \frac{4 \cdot (4+4)}{4}$$

$$9 = \frac{4}{4} + 4 + 4$$

$$10 = \frac{44-4}{4}$$

14.2. Relatório Aula 10

No dia vinte e cinco do mês de novembro de dois mil e vinte e três, nos reunimos nas dependências da UNIOESTE para realizar o último encontro do PROMAT. Compareceram à essa aula 8 alunos de nossa turma. Por ser a última aula do projeto, foi realizado um encontro diferenciado com uma gincana envolvendo diversas atividades preparadas em conjunto com os estagiários das outras turmas em diferentes pontos do campus da universidade. Nossos 8 alunos foram divididos em dois grupos de 4 pessoas, o mesmo ocorreu com as outras turmas, com isso foram formados 8 grupos para a gincana.

Nossa turma ficou responsável por organizar duas atividades, então dos quatro estagiários de nossa turma, dois ficaram organizando as atividades e dois ficaram responsáveis por acompanhar nossos grupos de alunos durante as atividades.

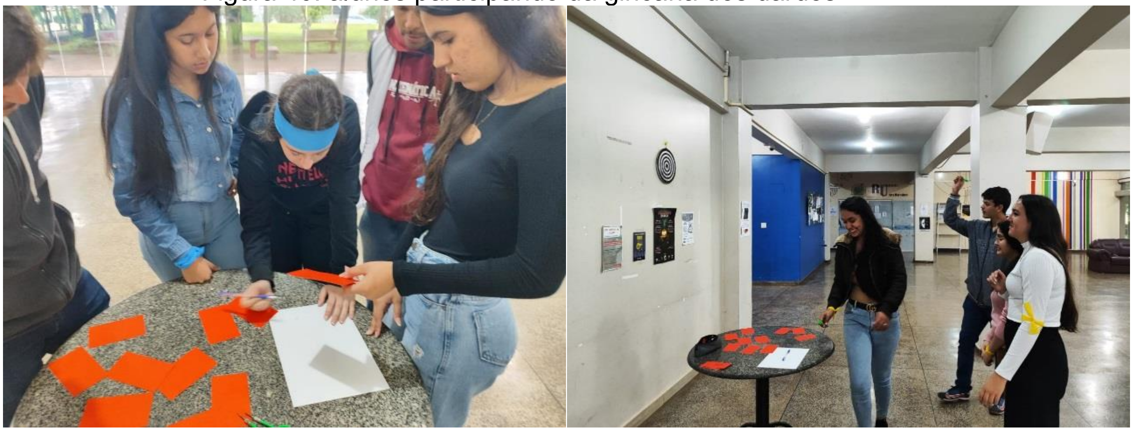
No jogo de dardos das frações, os alunos tinham que responder perguntas relacionadas aos conceitos de frações corretamente para lançar dardos em direção ao alvo. Todos os grupos se preocuparam em responder as questões rapidamente sem pensar muito, o que levou a diversos erros em perguntas em comum. Um dos problemas não teve nenhum acerto, ele dizia o seguinte: "Em uma disputa entre carros de corrida um competidor estava a 2/7 de terminar a prova quando sofreu um acidente e precisou abandoná-la. Sabendo que a competição foi realizada com 56 voltas no autódromo, em que volta o competidor foi retirado da pista?", todos grupos calcularam 2/7 de 56 e chegaram em 16 e deram essa resposta pensando que ele tinha completado 2/7 da prova, porém não observaram que na verdade faltava 2/7 para ele completar a corrida, logo estava na 40ª volta, foi lhes explicado onde o porquê erraram tal questão.

Também tiveram bastante dificuldades em uma questão que tratava das definições de fração própria e imprópria, alegaram não ter visto esses conceitos durante as aulas, portanto foi lhes dado uma pequena explicação sobre essa definição no momento da atividade.

O desempenho dos 8 grupos nesse foi bem desproporcional comparados entre si, a maioria teve apenas um ou dois erros, enquanto um grupo acertou apenas duas questões de 8. Durante o lançamento dos dardos os alunos se mostraram bem animados e eufóricos por estarem em clima de competição e movidos pela vontade de vencer a gincana.

Muitos alunos já conheciam o jogo de baralho conhecido como "21", para quem não conhecia foi explicado as regras para que pudessem jogar a adaptação que criamos, chamada por nós de "Blackjack" dos polinômios.

Figura 40: alunos participando da gincana dos dardos



Fonte: acervo dos autores (2023)

As adaptações feitas no jogo foram de fácil compreensão, com isso os alunos não tiveram muitas dificuldades no decorrer do jogo, e quando alguém apresentava alguma dúvida ou dificuldade em proceder, os professores os auxiliavam e explicavam novamente as regras. O estagiário que ficou responsável por coordenar a atividade se vestiu com o tradicional traje usado pelo *dealer* no jogo original, o que chamou a atenção dos alunos, deixando um clima mais divertido e agradável para o jogo.

Figura 41: alunos participando da gincana do Blackjack

Fonte: acervo dos autores (2023)

Às 11 horas, com o fim das atividades da gincana, todos grupos se deslocaram até o Laboratório de Ensino de Matemática, onde oi realizado um momento de confraternização com lanche. Nesse momento também foi anunciado quais eram os grupos com as três melhores pontuações na gincana. Os alunos relataram terem gostado muito das atividades realizadas no dia por ser algo dinâmico e interativo.

A sala foi dividida em dois grupos: o grupo de cor roxa e o grupo de cor amarela. O grupo Roxo gostou muito das atividades. Eles apresentaram um pouco de dificuldades em resolver a atividade em que era necessário resolver uma equação de segundo grau. No decorrer da atividade, algumas alunas do grupo conseguiram relembrar o desenvolvimento da fórmula resolutiva de segundo grau e ajudaram as suas colegas. Nas outras atividades, elas tiveram uma desenvoltura muito boa. Uma ajudava a outra e assim resolviam as atividades propostas. Conversando posteriormente com as alunas, elas relataram que as atividades que mais gostaram na gincana foram o tiro ao alvo das frações e a atividade do Tangram. Os alunos do grupo amarelo inicialmente estavam mais tímidos, mas, com o decorrer das atividades, foram desenvolvendo um ótimo trabalho em grupo, o que acarretou uma das melhores pontuações em toda a gincana.

15. Considerações Finais

Este relatório é o resultado de um projeto de grande valia para o nosso aprendizado, um projeto que se iniciou antes mesmo do primeiro encontro do PROMAT, foram dias de expectativas, ideias e preparo para cada aula acontecer.

Desenvolver este projeto é muito importante para a nossa formação é uma oportunidade de pôr em prática o que é visto em sala de aula, ministrar uma sala e poder estar à disposição do aluno é uma experiencia que não iremos esquecer, poder contar com a nossa orientadora em sua ajuda e em seu apoio tornou o processo mais leve.

Por fim podemos dizer com a certeza de que esta experiência foi importante para o nosso crescimento pessoal e profissional e ficará marcado em nossa trajetória.